DESS Informatique multimédia Université Bordeaux 1

TRAITEMENT D'IMAGE

Achille BRAQUELAIRE

— Janvier 2000 —

Table des matières

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Définition. Une image discrète de dimension n est une fonction définie sur un domaine $D \in \mathbb{N}^n$ et à valeur dans $[0..i_{max}]^p$. Usuellement on a $n = 2$ (image 2D) ou $n = 3$ (image 3D) et $p = 1$ (image monochrome) ou $p = 3$ (image couleur).

En 2D :

- Point : élément du domaine (x, y)
- Pixel : point coloré $\prec x, y, c \succ$

Traitement d'image : ensemble de transformations prenant une image numérique en entrée et produisant une image numérique en sortie.

Problématique(s)

- Intérêt en soi : amélioration de l'aspect d'une image dans le contexte d'une application donnée (visualisation de données, synthèse d'image, affichage sur un périphérique, etc.).
- Construction d'une nouvelle image : dessin, retouche (voir par exemple [[14]]).
- Prétraitement pour la compression d'image.
- Prétraitement pour l'analyse d'image.

Exemples

- [[18] p5, p7]
- [[10] P.129, P.164, P.173, P.187]
- [[20] p.226, p.242]

Transformations ne modifiant pas le domaine.

L'intensité de chaque pixel est modifiée en fonction de propriétés globales ou locales de l'image.

- Utilisation d'une propriété globale, généralement statistique (histogramme, etc.) et d'information locales.

$$I'(i, j) = \Psi_I(i, j)$$

  - Monochrome :

$$[0, 1] \to [0, 1]$$

  - Couleur :
    - Transformation canal par canal
    - Transformation sur l'intensité
    - Transformations sur une pseudo-intensité

  Exemple :

  - Complément (inversion) (ex : [[18] p.24])

$$i \to i_{max} - i$$

On a donc

$$\forall p \in I, \quad \complement(I)(p) = i_{max} - I(p)$$

– Seuillage (*threshold*)

$$T_{[i_m, i_M]}(I)(p) = \begin{cases} 1, \text{ si } i_m \leq I(p) \leq i_M, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

– Transformations dépendant de propriétés locales. Pour chaque pixel on analyse un voisinage de ce pixel (fenêtre).
Exemples : la plupart des filtrages.
Cas extrême : le voisinage est réduit à un pixel.

Transformation modifiant le domaine

– **Principe :** transformations géométriques du domaine (*déplacement* de pixels, rééchantillonnage...)
– **Intérêt :** modification de l'aspect de l'image, correction de distorsions, mise en correspondance.

Support théorique :
– Géométrie euclidienne et géométrie discrète
– Aspects géométriques
– Aspects topologiques (Homotopies : transformations topologiquement invariante – construction de l'*arbre d'homotopie* [[18] p.44])

Principales transformations :
– Cisaillements, rotations
– Changements d'échelle (rééchantillonnage)
– Déformations libres

Changement de représentation

Une autre famille importante est celle des transformations basées un changement de représentation. Généralement il s'agit d'une représentation explicitant les fréquences de l'image : transformée de Fourier, transformée en cosinus, transformée en ondelette.

Approches.

Il y a deux manières orthogonales de présenter le traitement d'image :
– Théorique (présentation centrée sur les outils) : théorie du signal, filtrage, morphologie mathématique, analyse bayesienne, analyse de données, etc.
– Pratique (présentation guidée par les objectifs) : amélioration, reconstruction, composition d'image, détection de bord, etc.

Nous avons priviliégié la démarche pratique. Nous allons cependant, dans le chapitre suivant, passer rapidement en revue les différentes approches qui serviront de base théorique à ce cours.

CHAPITRE 2

APPROCHES EN TRAITEMENT D'IMAGE

2.1 Approche filtrage

2.1.1 Contexte

Application dans le cadre discret de résultats et techniques élaborées dans le contexte de la théorie du signal pour le signal analogique.

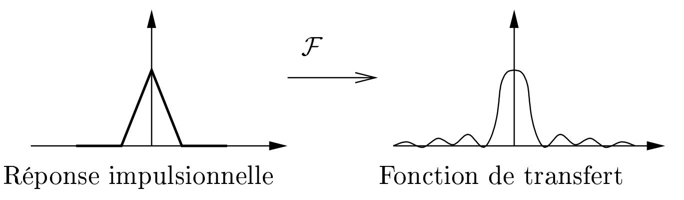
- L'image vue comme un signal (similitudes et différences)
- Caractérisation des fréquences de l'image
- Transformée de Fourier
- Spectre d'amplitude et spectre de phase
- Exemples

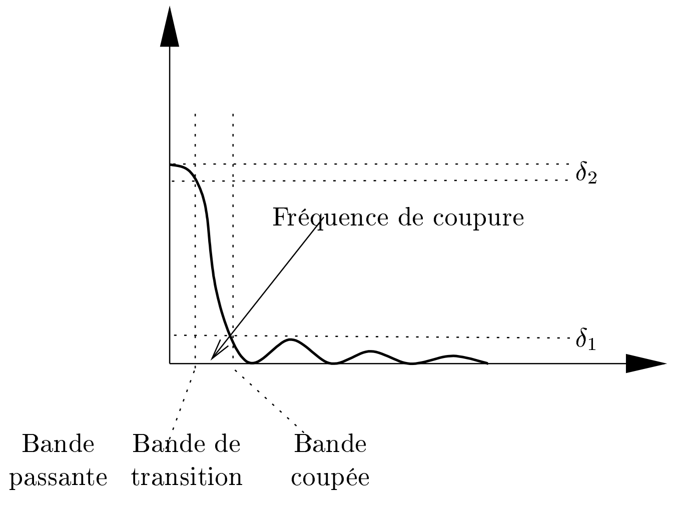
2.1.2 Filtrage

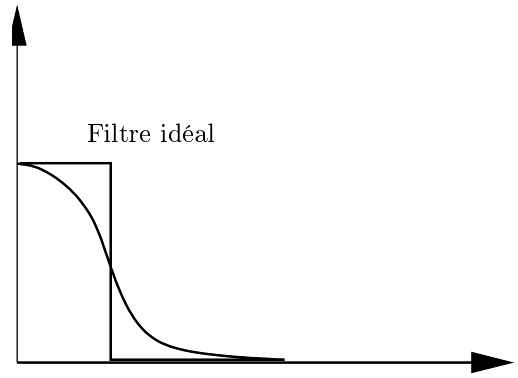
- Domaine spatial : $I'(x, y) = T(V(x, y))$ où V définit un voisinage.
- Domaine fréquentiel : le passage dans le domaine fréquentiel découle du théorème de convolution :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

2.1.3 Caractéristiques d'un filtre







Exemple de filtre passe-bas

Exemple bidimensionnel : [[9] p.166]

Nous verrons que l'on peut utiliser cette caractérisation pour construire des approximations de filtres idéaux.

2.1.4 Filtrage dans le domaine fréquentiel

On procède par masquage du spectre d'amplitude :

- Passe-bas / passe-haut
- Passe-bande
- Directionnel (secteur angulaire)
- Passe-bande directionnel
- Ponctuel (suppression d'informations périodiques directionnelles)

2.2 Approche morphologique

Domaine de la morphologie mathématique.

2.2.1 Principes généraux

- Matheron et Serra, milieu des années 60 pour les images noir et blanc (étude des milieux poreux)
- Extension aux images en niveaux de gris (parallèle avec les images topographiques. [[18], p.19]
- Cadre formel pour le traitement et l'analyse des structures spatiales.
  - Morphologie, car porte sur l'étude des formes
  - Mathématique, car s'appuyant sur la théorie des ensembles et l'algèbre des treillis.

2.2.2 Définitions

Transformations idempotentes. $\Psi \circ \Psi = \Psi$

Transformations croissantes. Relativement à une relation d'ordre sur les images, c'est-à-dire sur la valeur des pixels.

$$\forall I, J, I \leq J \Rightarrow \Psi(I) \leq \Psi(J)$$

Transformations invariantes. Par rapport à d'autres transformation, par exemple les translations ou les rotations.

Dualité Ψ et Φ sont duales si $\Psi = \complement\Phi\complement$

▷ ***Coupe** (cross section).* — ex : [[18] p.22] —

$$\boldsymbol{CS}_i = T_{[i, i_{max}]}$$

On a :

$$\boldsymbol{CS}_{i_{max}}(I) \subseteq \boldsymbol{CS}_{i_{max}-1}(I) \subseteq \ldots \subseteq \boldsymbol{CS}_0(I) \subseteq$$

Remarque : le seuillage est parfois appelé *fenêtrage* et la coupe *seuillage*.

▷ ***Principe de superposition des seuillages.***

$$I(p) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \boldsymbol{CS}_i(I)(p) = \max\{i / \boldsymbol{CS}_i(I)(p) \neq 0\}$$

On peut vérifier ce principe sur l'exemple suivant d'une image monochrome de taille 3×3 :

0	2	2
1	3	4
2	5	5

Si l'on écrit l'image en ligne, on obtient pour les différentes coupes :

	0	2	2	1	3	4	2	5	5
$\boldsymbol{CS}_1$	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{CS}_2$	0	1	1	0	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{CS}_3$	0	0	0	0	1	1	0	1	1
$\boldsymbol{CS}_4$	0	0	0	0	0	1	0	1	1
$\boldsymbol{CS}_5$	0	0	0	0	0	0	0	1	1

▷ ***Ensemble partiellement ordonné.***

1) $x \leq x$
2) $x \leq y, y \leq x \Leftrightarrow x = y$
3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

▷ ***Treillis complet.***

1) $E, \leq$ est un ensemble partiellement ordonnée
2) Toute famille de E possède une plus petite borne supérieure et une plus grande borne inférieure.

L'ensemble des images monochromes est un ensemble partiellement ordonné pour la relation d'ordre suivante :

$$I \leq J \text{ si } \forall p, I(p) \leq J(p)$$

On a :

$$I \leq J \Leftrightarrow \forall i, \boldsymbol{CS}_i(I) \subseteq \boldsymbol{CS}_i(J)$$

——— Cours 1 (10/01) : 3h ——————— ***Cours : 3h / TD : 0h / Total : 3h*** ———

——— TD 1 (15/01) : 2h ——————— ***Cours : 3h / TD : 2h / Total : 5h*** ———

2.2.3 Opérateurs de base

▷ ***Maximum.*** $I \vee J$

$$I \vee J(p) = \max\{I(p), J(p)\}$$

▷ ***Minimum.*** $I \wedge J$

$$I \wedge J(p) = \min\{I(p), J(p)\}$$

On a :

$$I \vee J = \sum_{i=1}^{i_{max}} \boldsymbol{CS}_i(I) \cup \boldsymbol{CS}_i(J)$$

$$I \wedge J = \sum_{i=1}^{i_{max}} \boldsymbol{CS}_i(I) \cap \boldsymbol{CS}_i(J)$$

Toute famille d'images $I_1, I_2, \ldots, I_n$ possède une plus petite borne supérieure $\vee_k I_k$ et une plus grande borne inférieure $\wedge_k I_k$. L'ensemble des images monochromes est un treillis complet.

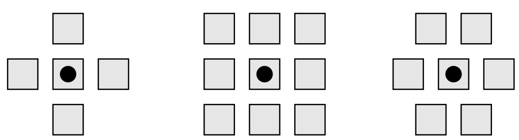
On a la même propriété pour les transformations d'intensité. On peut étendre la construction à des images à plusieurs canaux.

2.2.4 Élément structurant

- Image de petite taille utilisée pour explorer une image.
- Élément structurant plat : image noir et blanc. Seule la forme du domaine joue un rôle
- Possibilité d'utiliser des éléments structurants volumiques (ou en niveau de gris)
- L'élément structurant est muni d'une origine qui n'est pas nécessairement sur le bord de l'image.

On note X_p l'ensemble des points résultant du placement de l'élément structurant X au point p.

Exemple d'éléments structurants plats et isotropes

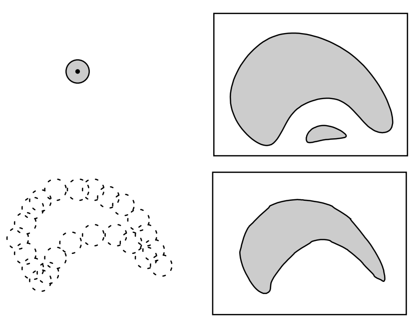


2.2.5 Érosion et dilatation

▷ ***Érosion.*** L'érosion d'un ensemble E par un élément structurant X, notée $\varepsilon_X(\mathcal{E})$ est un ensemble E' qui contient l'élément structurant en chaque point.

$$\varepsilon_X(E) = \{p / X_p \subseteq E\}$$

Exemple



Cela peut se récrire

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{x \in X} E_{-x}$$

qui se traduit directement pour les images par

$$\varepsilon_X(I) = \bigwedge_{x \in X} I_{-x}$$

où I_{-x} est la translation de l'image I par le vecteur $-x$. On a donc, pour une image noir et blanc comme pour une image monochrome :

$$\varepsilon_X(I)(p) = \min_{x \in X} I(x+p)$$

▷ ***Dilatation.*** De manière symétrique, on appelle dilatation d'un ensemble E par un élément structurant X l'ensemble des points où l'élément structurant intersecte l'ensemble. On pose

$$\delta_X(E) = \{p / X_p \cap E \neq \emptyset\}$$

ce qui se traduit pour une image I par

$$\delta_X(I) = \bigvee_{x \in X} I_{-x}$$

et par conséquent

$$\delta_X(I)(p) = \max_{x \in X} I(x+p)$$

2.2.6 Opérateurs de Minkovsky

L'érosion (resp. la dilatation) est également définie au moyen de la différence (resp. la somme) de Minkovsky.

$$I \oplus X = \bigcup_{x \in X} I_x = \{j / j = i + x, i \in I, x \in X\}$$

$$I \ominus X = \bigcap_{x \in X} I_x$$

2.2.7 Exemples

- [[18] p.53 et 55]
- [[18] p.54 et 55]
- [[20] p.318-319]

◇ ***Idée(s) d'exercice.*** *Calculer* $\delta_X(I)$ *et* $\varepsilon_X(I)$ *pour* $I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$ *et pour successivement*

$X = \boxed{\bullet}\ \square$ et $\bullet\ \square$

Réponse :

0	1	1	0	0
0	1	1	0	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

et

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	0

1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	0	0

2.2.8 Ouverture et fermeture

2.3 Approche stochastique

2.3.1 Motivations

- La modélisation d'une texture présente un caractère aléatoire

- Les déformations entre une image idéale et une image numérisé, liées au processus d'acquisition, se traduisent par des modèles de déformation aléatoire.
- Les algorithmes stochastiques, s'appuyant sur des résultats théoriques de convergence, fournissent un cadre pour l'optimisation des critères de segmentation.

2.3.2 Attributs stochastiques d'une image

On considère ici l'image comme un processus aléatoire discret $A[s]$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
- Variable aléatoire
- Moments
- Variance, écart type
- Matrice de corrélation

2.4 Approche neuromimétique

—— Cours 2 (17/01) : 2h —— ***Cours : 5h / TD : 2h / Total : 7h*** ——

—— TD 2 (17/01) : 1h —— ***Cours : 5h / TD : 3h / Total : 8h*** ——

—— TD 3 (22/01) : 2h —— ***Cours : 5h / TD : 5h / Total : 10h*** ——

CHAPITRE 3

ACQUISITION, DISCRÉTISATION ET RECONSTRUCTION

3.1 Le système de vision humain

3.2 Le processus de discrétisation

Un image est une application $I : D \to \mathcal{C}$ où D est le domaine de l'image et $\mathcal{C}$ est un espace de couleur. Exemples :

- Image continue 2D : $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- Image discrète 2D : $D \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

L'acquisition d'une image numérique est un processus de discrétisation d'une image continue (ou perçue comme telle).

- Échantillonnage + quantification
- Choix de la grille
- Choix $N.m$
- Tramage : *quantification spatiale*

3.3 Caractérisation des erreurs d'échantillonnage

- Intérêts : caractérisation des erreurs d'échantillonnage, fitrage, reconstruction, analyse et traitement dans le domaine fréquentiel.
- Aliasing
- Fréquence de coupure
- Solution : filtrage passe-bas
- Exemples

3.4 Quantification des valeurs de l'image continue

3.4.1 Principe

Discrétisation des valeurs d'un signal continu, ou quasi-continu (par exemple, pour des images couleurs, un signal sur $2^{3\times 12}$ bits).

- Intérêt : ramener l'image de l'espace utilisé pour construire l'image (espace de mesure, image de synthèse) dans un espace plus approprié à sa visualisation.
- Objectif : il s'agit généralement de conserver une bonne dynamique à l'image.

3.4.2 Quantification uniforme

1) Image monochrome : K niveaux de gris équirépartis sur $[0, 1]$; les représentants sont les valeurs de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, K-1\}$.
2) $Q(1) = K - 1$.
3) $c \neq 1, Q(c) = \lfloor Kc \rfloor$.

3.4.3 Quantification logarithmique

- Perception visuelle sensible aux rapports (loi de Weber des rapports de contrastes).
- Plus grande sensibilité aux faibles intensités qu'aux fortes
- Transformation logarithmique avant quantification : meilleure dynamique
- Translation et changement d'échelle du domaine de départ :

$$y = \lambda \log_b(1 + \mu x)$$

  - $y = \frac{1}{8} \log_2(1 + 255x) \quad : \quad [0,1] \to [0,1]$
  - $y = \frac{255}{8} \log_2(1 + x) \quad : \quad [0..255] \to [0..255]$
- Approximation polynomiale

$$\frac{t}{t - rt + r} \quad , \quad r \in]0,1]$$

3.5 Images de dimension supérieure

- Acquisition
- Problèmes de représentation

CHAPITRE 4

MODÉLISATION, REPRÉSENTATION ET REPRODUCTION DES COULEURS

4.1 Modélisation de la couleur

- DSP : $E(\lambda)$
- Température de couleur : loi de radiation de Planck

$$P(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)}$$

  - λ : longueur d'onde
  - T : température en degrés kelvins
  - $c_1 = 37418$
  - $c_2 = 14388$
  - $e = 2.718$
- Capteur

$$\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} E(\lambda)s(\lambda)d\lambda$$

- Modèle du système de vision humain.
- Courbes de sensibilité de cônes [7] (p.12-15)
- Couleurs métamères. Exemple $\{530, 700\} \simeq \{570, \alpha \times blanc\}$ (α petit).
- Lois de Grassman
  - Additivité : $C_1 \simeq C_2 \Leftrightarrow C_1 + C_3 \simeq C_2 + C_3$
  - Multiplication par un scalaire : $C_1 \simeq C_2 \Leftrightarrow \alpha C_1 \simeq \alpha C_2$
- Expérience de mise en correspondance [12] (p.111)
- Coordonnées normalisées d'une distribution spectrale : système CIE XYZ

$$X = k\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} E(\lambda)S(\lambda)\overline{x}(\lambda)d\lambda$$

$$Y = k\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} E(\lambda)S(\lambda)\overline{y}(\lambda)d\lambda$$

$$Z = k\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} E(\lambda)S(\lambda)\overline{z}(\lambda)d\lambda$$

  avec $k = \frac{1}{\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda)\overline{y}(\lambda)d\lambda}$

4.2 Reproduction des couleurs

4.2.1 Linéarisation des couleurs

- Non linéarité des moniteurs
  - Intensité normalisée entre 0 et 1 : $I = \frac{i}{i_{max}}$

- Loi usuelle : $L = \alpha V^\gamma$ (V : voltage, L : luminosité émise).

$$I' = \Gamma(I) = I^\gamma$$

$$I'_\alpha = \Gamma(I_\alpha) = I_\alpha^{\gamma_\alpha}$$

- Loi de Rougeron

$$I' = e^{A \log I + B \log^2 I + C}$$

$$I'_\alpha = e^{A_\alpha \log I_\alpha + B_\alpha \log^2 I_\alpha + C_\alpha}$$

- Solution historique : gamma correction
- Solution correcte : linéarisation des données et correction logicielle au niveau du driver d'affichage
  `http ://`
- Estimation de γ au moyen d'un tramage

4.2.2 Calibrage d'un moniteur

On suppose que l'échelle des couleurs est linéaire. On dispose de :
- (x_R, y_R), (x_G, y_G), (x_B, y_B)
- (x_N, y_N), par exemple avec D_{65} : $(0.312713, 0.329016)$.
- $Y_N = 1$ (hypothèse de normalisation)

Problème : trouver $X_R, X_G, X_B, Y_R, Y_G, Y_B, Z_R, Z_G, Z_B$,
On a :

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \quad \text{et} \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z}$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{X}{Y}$$

et

$$X = Y\frac{x}{y}$$

On suppose d'autre part :

$$M_{RGB \to XYZ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_R & X_G & X_B \\ Y_R & Y_G & Y_B \\ Z_R & Z_G & Z_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_N \\ Y_N \\ Z_N \end{pmatrix}$$

On supprime X_α et Z_α dans l'équation, ce qui donne finalement le système :

$$\begin{cases} \frac{x_R Y_R}{y_R} + \frac{x_G Y_G}{y_G} + \frac{x_B Y_B}{y_B} &= \frac{x_N}{y_N} \\ Y_R + Y_G + Y_B &= 1 \\ \frac{z_R Y_R}{y_R} + \frac{z_G Y_G}{y_G} + \frac{z_B Y_B}{y_B} &= \frac{x_N}{y_N} \end{cases}$$

On résout ce système :

$$\Delta = x_R(y_G - y_B) - x_G(y_R - y_B) + x_B(y_R - y_G)$$

On obtient successivement :

$$\begin{cases} X_R = \frac{x_R}{y_N} K_R \\ Y_R = \frac{y_R}{y_N} K_R \\ Z_R = \frac{1 - x_R - y_R}{y_N} K_R \end{cases} \quad \text{avec} \quad K_R = \frac{x_G(y_B - y_N) - x_B(y_G - y_N) + x_N(y_G - y_B)}{\Delta}$$

$$\begin{cases} X_G = \frac{x_G}{y_N} K_G \\ Y_G = \frac{y_G}{y_N} K_G \\ Z_G = \frac{1 - x_G - y_G}{y_N} K_G \end{cases} \quad \text{avec} \quad K_G = \frac{x_R(y_B - y_N) - x_B(y_R - y_N) + x_N(y_R - y_B)}{\Delta}$$

$$\begin{cases} X_B = \frac{x_B}{y_N} K_B \\ Y_B = \frac{y_B}{y_N} K_B \\ Z_B = \frac{1 - x_B - y_B}{y_N} K_B \end{cases} \quad \text{avec} \quad K_B = \frac{x_R(y_G - y_N) - x_G(y_R - y_N) + x_N(y_R - y_G)}{\Delta}$$

Outil de vérification : charte Greta Macbeth

4.2.3 Scanner : utilisation de chartes

Charte IT8 / Q65

4.2.4 Imprimante : calibrage par table

- La gamme d'une imprimante s'éloigne de la gamme idéale (concavités, tassements vers l'origine).
- Mesure colorimétrique d'un échantillonnage cubique de la gamme du périphérique.
- Conversion XYZ $\rightarrow$ CMY de l'imprimante par interpolation trilinéaire.

4.2.5 Méthode de superposition des gammes

- Objectifs de la transformation :
  1) Préservation des gris
  2) Maximum de contraste de luminance
  3) Peu de couleur hors de la gamme
  4) Minimisation des décalage teinte/saturation
  5) Préférable d'augmenter que de diminuer la saturation
- Modification de la gamme de l'image par :
  - Changements d'échelles et translations
  - Rotations autour de l'axe des gris
  - Transformation *ombrelle*

4.2.6 Conversion R'G'B'/R"G"B"

- Transformation écran $\rightarrow$ écran
- Traitement des couleurs non réalisables

CHAPITRE 5

CORRECTION DE DÉFAUTS

5.1 Traitement du bruit

5.1.1 Définitions

(*despeckel*, lit. détacheture)

- Réponse impulsionnelle : densités de probabilité de la forme :

$$p(I) = C \exp(-K|I|^{\alpha})$$

  avec :
  - $\alpha = 2$: bruit gaussien
  - $\alpha = 1$: bruit exponentiel
  - $\alpha \to \infty$: bruit uniforme
- Généralement bruit additif :

$$g(x, y) = f(x, y) + \nu(x, y)$$

- Dans certains cas (par exemple radar, grain radiographie), bruit multiplicatif :

$$g(x, y) = f(x, y) \times \nu(x, y)$$

- Parfois, bruit convolutif

$$g(x, y) = f(x, y) * \nu(x, y)$$

5.1.2 Caractérisation

(voir début chapitre 2)

5.1.3 Utilisation d'un filtre linéaire

- Filtre linéaire de réponse impulsionnelle f : $I'(x, y) = I * f(x, y)$
- Le bruit correspond à des hautes fréquences : passe-bas (gaussien par exemple)

5.1.4 Filtres homomorphiques

1) Principe : $\psi \circ h \circ \varphi$ où φ et ψ sont des opérateurs non linéaires réciproques et f la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaires généralement passe-bas.
2) Moyennes non linéaires : pour $p \neq 0$, on prend $\varphi(i) = i^p$ et $\psi(i) = i^{\frac{1}{p}}$.
   - Pour $p = -1$, moyenne harmonique.
   - Pour $\varphi = \log$ et $\psi = exp$, moyenne géométrique.

5.1.5 Filtres d'ordre

1) Principe. On considère la suite i_j des intensités sur une fenêtre de taille L et la suite triée de ces intensités ($i_{(j)}$ est la $j^{\text{ème}}$ statistique d'ordre). On considère des fenêtres à domaine carré ou octogonal.

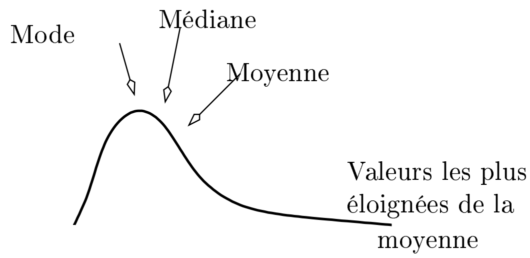
2) L-filtres :

$$I'(i,j) = \sum_{k=1}^{L} c_k i_{(k)} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{L} c_k = 0$$

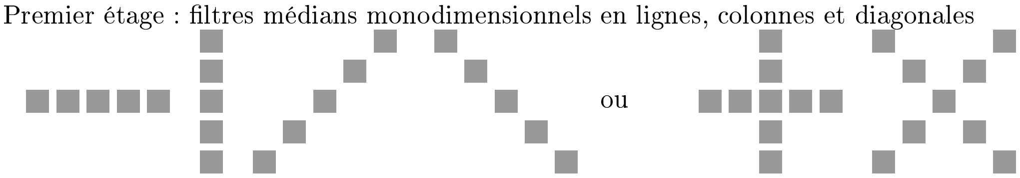
- filtre milieu : $c_1 = c_L = \frac{1}{2}$, et $c_i = 0$ pour $i \neq 0$ et $i \neq L$.
- filtre à moyenne tronquée : $c_k = \frac{1}{2p+1}$ pour $\frac{L+1}{2} - p \leq k \leq \frac{L+1}{2} + p$ et 0 sinon.
- Filtre médian standard : L-filtre avec $c_k = 1$ si $k = \frac{L+1}{2}$.

Exemples de ces trois filtres en 1D sur :
- *1 2 3 7 8 9*
- *1 2 90 4 5 6*

3) Filtre médian tronqué : on écarte les valeurs les plus éloignées de la moyenne dans le but de rapprocher la médiane du mode.



4) Filtre à deux étages
- Premier étage : filtres médians monodimensionnels en lignes, colonnes et diagonales



- Second étage
  - maximum : max-médian
  - médian des médian et du pixel central : multimédian (hybride)

5.1.6 Filtre *olympique*

- Suppression des valeurs extrêmes
- Moyenne des valeurs restantes

5.1.7 Moyennage d'images

Hypothèse : l'image bruitée est la somme d'une image non bruitée et d'un bruit.
Si on dispose d'une famille g_i d'images bruitées, on construit :

$$\bar{g}(x,y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} g_i(x,y)$$

Si on suppose $\nu(x,y)$ décorellé et de valeur moyenne nulle, on peut montrer :

$$E\{\bar{g}(x,y)\} = f(x,y)$$

5.1.8 Filtres morphologiques

Rappels

- $\varepsilon_B(f)$: érosion de f par l'élément structurant B
- $\delta_B(f)$: dilatation de f par l'élément structurant B
- $\breve{B}$: transposé de B (symétrique de l'élément structurant par rapport à son origine)

▷ ***Ouverture morphologique.***

$$\gamma_B(f) = \delta_{\breve{B}}(\varepsilon_B(f))$$

▷ ***Fermeture morphologique.***

$$\phi_B(f) = \varepsilon_{\breve{B}}(\delta_B(f))$$

Remarque 5.1 *Il existe d'autres définitions d'ouverture et de fermeture.*

Propriétés :
- $\gamma_B = \complement\phi_B\complement$
- $\gamma \leq I \leq \phi$
- Transformations croissantes :
  - $f \leq g \Rightarrow \gamma(f) \leq \gamma(g)$
  - $f \leq g \Rightarrow \phi(f) \leq \phi(g)$
- Transformations idempotentes :
  - $\gamma\gamma = \gamma$
  - $\phi\phi = \phi$

Principe

- Suppression sélective de structures de l'image
- Transformation idempotente et croissante.

Exemples

- Ouverture : filtrage de structures claires
- Fermeture : filtrage de structures sombres
- Ouverture/fermeture et fermeture/ouverture : $\gamma\phi$, $\phi\gamma$
- Filtres séquentiels alternants : alternance d'ouvertures/fermetures ou de fermetures/ouvertures en augmentant la taille de l'élément structurant, par exemple au rang i, un carré de $2i+1$ pixels de côté. [[18] p.216]
- Combinaisons en parallèle : exemple union du résultat de deux ouvertures avec des éléments structurants directionnels différents. [[18] p.212]

5.1.9 Bruit périosique

Suppression de trames parasites dans l'image,
- Identification de fréquence surabondantes dans le spectre.
- Suppression sélective de fréquensce

——— Cours 3 (22/11) : 3h ——————— ***Cours : 8h / TD : 5h / Total : 13h*** ———

TD : mise en oeuvre d'une FFT et filtrage fréquentiel au moyen de la bibliothèque *FFTW*.

——— TD 4 (25/11) : 3h ——————— ***Cours : 8h / TD : 8h / Total : 16h*** ———

5.2 Correction de l'illumination

5.2.1 Problématique

Image avec une illumination non homogène due à de mauvaises conditions d'acquisition. Le principe de la correction consiste à obtenir un fond avec la même illumination et à l'utiliser pour corriger l'image.
- Division si l'échelle des gris est linéaire

– Soustraction si elle est logarithmique
– Dans les autres cas, pas de fonction simple

Il est ensuite nécessaire d'effectuer un rehaussement de contraste de l'image résultante.

5.2.2 Acquisition d'un fond

Il est possible d'acquérir un fond d'image dans les mêmes conditions. Exemple : prise de vue sur un microscope [[17] p.48].

– Acquisition du fond F
– Combinaisons des images : $I' = I\#F$
– Rehaussement du contraste de I'

5.2.3 Approximation du fond

On sélectionne un ensemble de points de l'image, puis on recherche par une méthode de moindre carrés une fonction $(B(x,y)$ passant pas ces points, par exemple le polynôme de degré 2 :

$$B(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$$

La sélection automatique s'effectue en subdivisant l'image en échantillons réguliers et en retenant le point le plus lumineux de chaque échantillon. [[17] p.82]

5.2.4 Reconstruction morphologique du fond

1) Érosions successives [[17] p.85]
2) Fermeture avec un élément structurant carré de grande taille [[18] p.108]

5.2.5 Utilisation d'un haut-de-forme

Correction d'illumination avec un haut-de-forme blanc : [[18] p.107]

5.3 Correction de flou

Suppression de flou dû au bougé

CHAPITRE 6

LISSAGES

6.1 Lissage

6.2 Lissage dans le domaine fréquentiel

Rappels sur le domaine fréquentiel

- Transformation de Fourier 2D
- Interprétation du spectre d'amplitude
- Théorème de convolution

6.2.1 Filtre passe-bas idéal

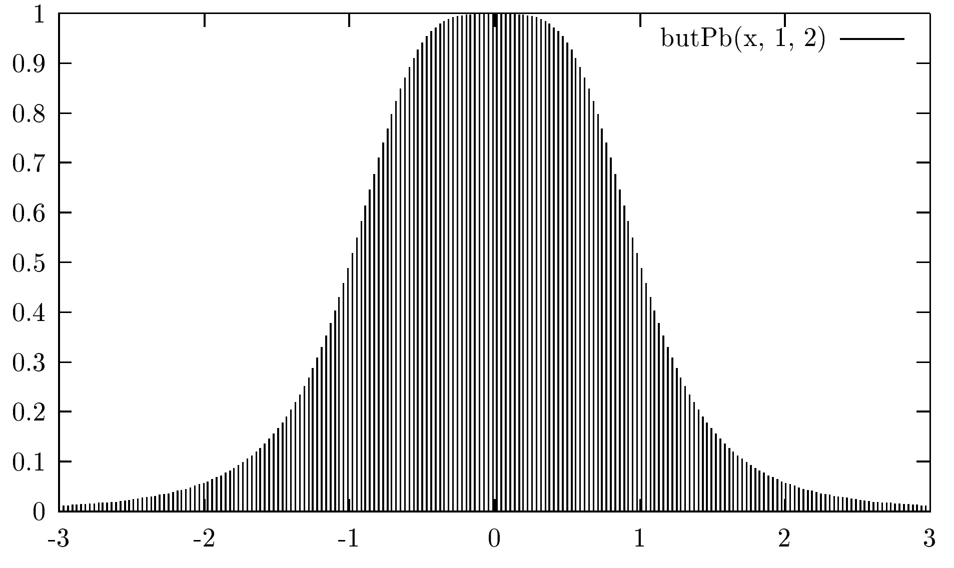
6.2.2 Butterworth

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + (\frac{D(u,v)}{D_0})^{2n}}$$

avec

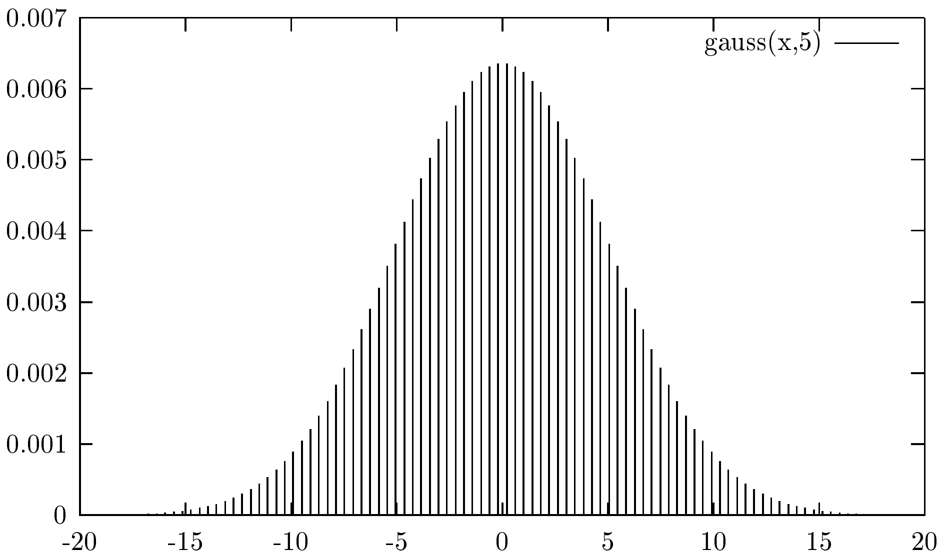
$$D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Remarque. Pour $D(u,v) = D_0$ on a $H(u,v) = \frac{1}{2}$: fréquence de coupure.



6.3 Lissage dans le domaine spatial

- Rappels : convolution, théorème de convolution.
- Approximation de *sinc* (Filtre de Lanczos)
- Boite, Bartlett
- Gaussienne : $\frac{1}{2\pi\sigma^2}\ exp(-\frac{r^2}{2\sigma^2})$. Le lissage croît avec σ.



$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & . \\ & 12 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . \\ & 7 & 11 & & \\ & & 17 & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & . \\ & 1 & 2 & 3 & 3 & & & & \\ & & 3 & 6 & 7 & & & & \\ & & & 9 & 11 & & & & \\ & & & & 12 & & & & \end{pmatrix}$$

- Binomial. Filtre 3×3 :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$
- Séparabilité, précalcul

6.4 Moyennes seuillées

6.5 Filtrage directionnels

- Filtrage dans le domaine spatial : simulation de bougés par translation, rotation, zoom.
- Filtrage dans le domaine fréquentiel.

CHAPITRE 7

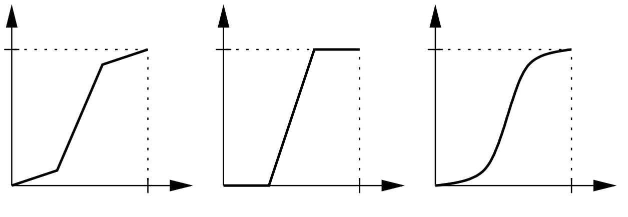
REHAUSSEMENT DE CONTRASTE

7.1 Définitions [3]

1) $c(s,t)$: contraste associé à deux points s et t
   - Image linéaire :
   $$c(s,t) = \frac{|I(s) - I(t)|}{N-1}, \quad N \text{ : niveaux de gris}$$
   - Image corrigée logarithmiquement :
   $$c(s,t) = \frac{|I(s) - I(t)|}{\max\{I(s), I(t)\}}$$
2) Contraste d'une région R
   - Contraste intérieur : moyenne des contrastes locaux des points de R.
   $$C_{int}(R) = \frac{1}{|R|} \sum_{s \in R} \max_{t \in V(s) \cap R} \{c(s,t)\}$$
   - Contraste extérieur : moyenne des contrastes locaux à la frontière de R.
   $$C_{ext}(R) = \frac{1}{|\boldsymbol{Front}(R)|} \sum_{s \in \boldsymbol{Front}(R)} \max_{t \in V(s), t \notin R} \{c(s,t)\}$$
   - Contraste :
   $$C(R) = \begin{cases} 1 - \dfrac{C_{int}(R)}{C_{ext}(R)} & \text{si } C_{int}(R) < C_{ext}(R) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7.2 Rehaussement global

7.2.1 Augmentation de la dynamique



7.2.2 Normalisation

7.2.3 Transformations basées sur l'histogramme

1) Équilibrage
$$T(I) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{I} p(i)$$

2) Obtention d'un histogramme plat par éclatement des classes de pixels de même intensité en sous-classes. (extension de la notion de transformation d'intensité).
3) Équilibrage par plages
4) Spécification d'histogramme

7.2.4 Rehaussement de détail

– Transformations par bande

——— Cours 4 (31/01) : 3h ——— ***Cours : 11h / TD : 8h / Total : 19h*** ———

——— TD 5 (5/02) : 2h ——— ***Cours : 11h / TD : 10h / Total : 21h*** ———

7.3 Rehaussement local

7.3.1 Principe

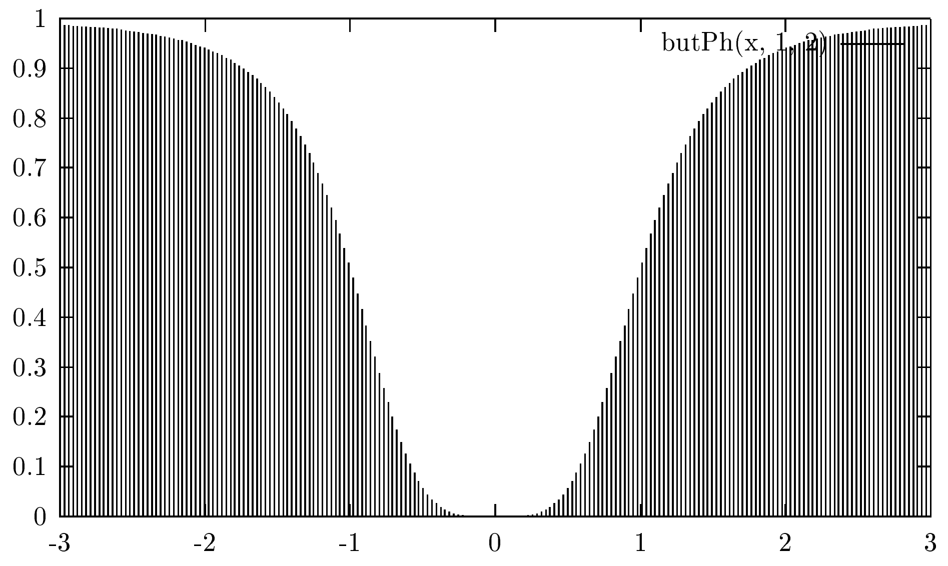
Le principe consiste à accentuer la transition sur les bords des régions de l'image :
– Augmentation de la dynamique localement, et donc du contraste des régions (voir définition)
– Accentuation de l'effet de bande de Mach

Différentes approches sont possibles : suppression des basses fréquences, rehaussement des haute fréquences du spectre, matérialisation des contours des régions.

7.3.2 Utilisation d'un filtre passe-haut

– Filtre idéal
  Coupure de toutes les fréquences inférieures à un seuil.
– Butterworth passe-haut
  La fonction de transfert du filtre est donnée par :

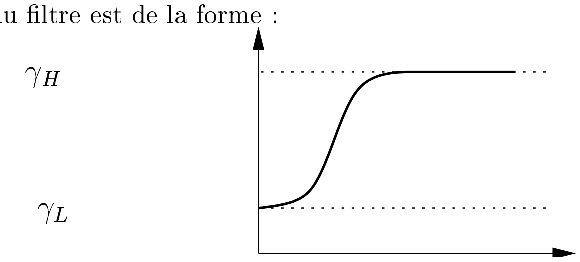
$$\frac{1}{1+(\frac{D_0}{D(u,v)})^{2n}}$$



– Filtre homomorphique
  On enchaîne les étapes suivantes :
  1) Correction logarithmique.

2) Transformée de Fourier.
3) Filtrage fréquentiel atténuant les basses fréquences et accentuant les hautes.
4) Transformée inverse.
5) Correction exponentielle.

La fonction de transfert du filtre est de la forme :



avec $\gamma_L < 1$ et $\gamma_H > 1$.

7.3.3 Accentuation des hautes fréquences

Ajout du laplacien.

On suppose que $\bar{I}$ résulte du lissage de I. On retrouve I à partir de $\bar{I}$ en calculant $\bar{I} + (I - \bar{I}) = \bar{I} + K\Delta I$.

On approxime ce calcul par

$$\bar{I} + K\Delta\bar{I}$$

c'est-à-dire en rajoutant à l'image à rehausser une valeur proportionnelle à son laplacien.

▷ ***Laplacien.***

$$\Delta I(x, y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

On cherche des analogues discrets de l'opérateur

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

L'approximation la plus simple est :

$$|\nabla I(i,j)|^2 = \frac{\mathbf{d}^2 I}{\mathbf{d}x^2}(i,j) + \frac{\mathbf{d}^2 I}{\mathbf{d}y^2}(i,j)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{d}^2 I}{\mathbf{d}x^2}(i,j) &= (\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}x}(i+1,j) - \frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}x}(i,j)) \\
&= 2I(i,j) - I(i+1,j) - I(i-1,j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{d}^2 I}{\mathbf{d}y^2}(i,j) &= (\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}y}(i,j+1) - \frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}y}(i,j)) \\
&= 2I(i,j) - (i,j+1) - (I(i,j-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\nabla I(i,j)|^2 &= 2I(i,j) - I(i+1,j) - I(i-1,j) + 2I(i,j) - (i,j+1) - (I(i,j-1) \\
&= 4I(i,j) - I(i+1,j) - I(i-1,j) - I(i,j+1) - I(i,j-1)
\end{aligned}$$

Cela se traduit par une convolution discrète avec le noyau :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

On utilise également couramment le noyau :

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

On peut donc approximer la transformation $\bar{I} + K\Delta\bar{I}$ de différente manières :

$$K = 1 : \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K = 2 : \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 17 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Remarque 7.1 *On note $V(i,j)$ le voisinage de (i,j) excluant le point (i,j) et $V^+(i,j)$ l'ensemble $V(i,j) \cup (i,j)$. Dans les deux cas, on a :*

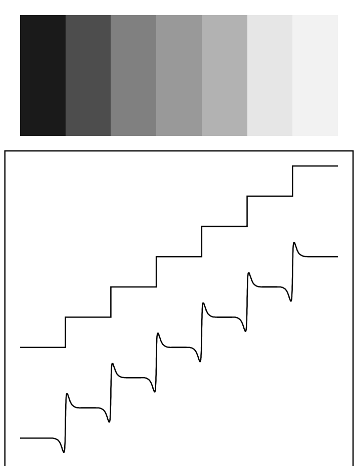
$$\begin{aligned} \Delta I(x,y) &= |V(i,j)| \times I(i,j) - \sum_{(i',j') \in V(i,j)} I(i',j') \\ &= |V^+(i,j)| \times I(i,j) - \sum_{(i',j') \in V^+(i,j)} I(i',j') \\ &= \frac{1}{|V^+(i,j)|} \times (I(i,j) - \bar{I}(i,j)) \end{aligned}$$

On vérifie ainjsi que le laplacien discret est proportionnel à la différence entre l'image et l'image lissée. Cela revient à extraire les hautes fréquences de l'image par soustraction des basses fréquences.

Exemple en 1D. Le laplacien est obtenu avec $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ et le rehaussement avec $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

I	:	0	0	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	3	3	3
ΔI	:	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	3	-3	0	0
$I + \Delta I$	:	0	0	**-1**	1	2	3	4	**6**	5	5	5	**4**	**7**	6	6	6	6	**9**	**0**	3	3	3

Cette opération correspond à une opération naturelle du système de vision humain, dont une manifestation est l'effet de bande de Mach.



Soustraction d'une image lissée

Voir exemple.

Transformation de Jarvis et al. Il s'agit de la transformation la plus usuelle (`pgmenhance`, `xv`, etc.).

$$I'(i,j) = \frac{I(i,j) - \alpha \bar{I}(i,j)}{1-\alpha}$$

avec $0 \leq \alpha < 1$ et où $\bar{I}$ est l'image lissée par un filtre boite 3×3. On note que pour $\alpha = 0.9$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I'(i,j) &= \frac{1}{1-0.9}\left(I(i,j) - 0.9 \times \frac{1}{9} \times \sum_{(i,j)\in V^+(i,j)} I(i,j)\right) \\
&= 10 \times \left(I(i,j) - 0.1 \times \sum_{(i,j)\in V^+(i,j)} I(i,j)\right) \\
&= 10 \times I(i,j) - \sum_{(i,j)\in V^+(i,j)} I(i,j) \\
&= 9 \times I(i,j) - \sum_{(i,j)\in V(i,j)} I(i,j)
\end{aligned}$$

ce qui correspond à l'ajout du laplacien sur un voisinage de 8 points.

——— Cours 5 (1/12) : 2h ——————— ***Cours : 13h / TD : 10h / Total : 23h*** ———

7.3.4 Opérateurs morphologiques

Haut-de-forme

Principe. Il s'agit d'un opérateur morphologique opérant sur le principe inverse d'un filtre morphologique : on effectue une ouverture ou une fermeture avec un élément structurant qui supprime les éléments relevants de l'image, puis on effectue une différence du résultat avec l'image original. Cela a pour effet de supprimer les éléments non relevants.

HDF blanc (ou haut-de-forme par ouverture). Soustraction de l'image et de son ouverture :

$$\mathbf{HDF_B}(f) = f - \gamma(f)$$

Le résultat est toujours supérieure ou égale à zéro (voir propriétés de l'ouverture page 5.1.8).

HDF noir (ou haut-de-forme par fermeture). Soustraction de la fermeture d'une image avec elle même :

$$\mathbf{HDF_N}(f) = \phi(f) - f$$

Le résultat est toujours supérieure ou égale à zéro (voir propriétés de l'ouverture page 5.1.8).

Propriétés

- $\mathbf{HDF_B}$ est idempotent.
- $\mathbf{HDF_B} = \mathbf{HDF_N} \circ \complement$
- $\mathbf{HDF_N} + \mathbf{HDF_B} = \phi - \gamma$
- Rehaussement du contraste [[18] p.109-110] :

$$\kappa^{TH} = I + \mathbf{HDF_B} - \mathbf{HDF_N}$$

Les valeurs hors d'un intervalle dynamique $[t_{min}, t_{max}]$ sont forcées à t_{min} ou à t_{max}.

Sélecteur (*toggle mapping*)

Un sélecteur morphologique est la donnée d'un ensemble de transformations et d'un critère permettant de sélectionner en chaque point la transformation à appliquer. On considère un sélecteur à deux états κ^2 défini avec deux transformations ψ_1 et ψ_2 et qui retient la transformation donnant le résultat le plus proche de la valeur d'origine :

$$\kappa^1(x) = \begin{cases} \psi_2(x), & \text{si } \psi_2(x) - I(x) < I(x) - \psi_1(x), \\ \psi_1(x), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient un rehaussement en prenant une érosion et une dilatation [[18] p.223].

Opérateur de contraste naturel

Utilisation d'un opérateur de rehaussement de contraste avec des éléments structurants de différents tailles :

$$\Psi_N = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{N} \Psi_i$$

7.3.5 Cas des images multibande

Voir exemple.

CHAPITRE 8

QUANTIFICATION ET TRAMAGE

8.1 Introduction

8.1.1 Problématique de la quantification

La quantification est un échantillonnage des valeurs du signal (échantillonnage en amplitude), c'est-à-dire en ce qui nous concerne des niveaux de gris ou des couleurs d'une image. On peut décomposer le problème en deux sous-problèmes :

- choisir k représentants dans l'espace des valeurs à quantifier recherche de couleurs « représentatives ») ;
- construire une fonction de quantification

$$Q : C \rightarrow \{c_1, \ldots, c_k\}$$

On construit alors l'image quantifiée I_Q en applicant la fonction Q en chaque pixel : pour chaque pixel p de l'image I, remplacement de la couleur c de p par la couleur $Q(c)$.

Il y a deux problématiques distinctes :

1° Réduction du nombre de couleurs d'une image discrète, c'est-à-dire déjà quantifiée au sens de la discrétisation.
   - Intérêt : affichage sur support restreint en nombre de couleurs, compression, segmentation.
   - Objectif : si l'on se donne une fonction d'erreur permettant de mesurer la distorsion entre I et I_Q, l'objectif est alors de minimiser cette distorsion, pour k petit devant le nombre de couleurs de I.

On peut distinguer deux approches :

- Quantification prédéfinie (uniforme ou non) : plus adaptée au premier problème.
- Quantification adaptative (NP-complet en dimension 3) : plus adaptée au second problème.

8.1.2 Problématique de la quantification

- Réduction du nombre de couleurs d'une image discrète, c'est-à-dire déjà quantifiée au sens de la discrétisation.
- Intérêt : affichage sur support restreint en nombre de couleurs, compression, segmentation.
- Objectif : si l'on se donne une fonction d'erreur permettant de mesurer la distorsion entre I et I_Q, l'objectif est alors de minimiser cette distorsion, pour k petit devant le nombre de couleurs de I.

8.1.3 Problématique du tramage

Utilisation du mélange optique pour produire des couleurs intermédiaires par juxtaposition de points de différentes couleurs de base. Obtention de dégradés à partir d'un petit nombre de niveaux de gris ou de couleurs.

- Calculer une distribution de densité des couleurs de base
- Organiser spatialement cette distribution

8.1.4 Lien quantification/tramage

Le tramage permet de réduire la distorsion visuelle introduite par la quantification. Pour cela ce sont des procédés souvents associés :

- Quantification : réduction du nombre de couleurs mais apparition de pages.
- Tramage : atténuation des plages par simulation de dégradés.

8.2 Quantification prédéfinie

8.2.1 Cas monodimensionnel

8.2.2 Cas multidimensionnel

- Quantification canal par canal (se ramène au cas monodimensionnel)
- Problème de distorsion des gris lorsqu'on n'affecte pas la même bande passante à chaque canal. Exemple : on choisit de coder RGB sur respectivement 3, 3 et 2 bits. On a :

$$\begin{aligned}
(0.45, 0.45, 0.45) &\rightarrow (\lfloor 7 \times 0.45 \rfloor, \lfloor 7 \times 0.45 \rfloor, \lfloor 3 \times 0.45 \rfloor) \\
&\rightarrow (3, 3, 1) \\
&\rightarrow (3\frac{255}{7}, 3\frac{255}{7}, 1\frac{255}{3}) \\
&\rightarrow (109, 109, 85)
\end{aligned}$$

- Sur 8 bits, possibilité de coder 6 niveaux par canal, soit $6^3 = 216 < 255$ couleurs.
- Sur 16 bits, il est préférable de coder chaque canal sur 5 bits.
- Problème de l'implémentation de la fonction de quantification : exemple du découpage dodécahédrique de l'espace de couleur.

8.3 Quantification optimale

8.3.1 Problématique

1) Minimiser une fonction d'erreur
   - Erreur quadratique
   - Choix de l'espace de couleurs
   - Autres fonctions d'erreur
2) Monochrome. Minimisation de l'EQ en $O(N \log N)$ [Wong, Wan and Prusinkiewicz]
3) Couleur. La minimisation de l'EQ est un pb NP-complet.

8.3.2 Quantification optimale d'image monochrome

- Soit N le nombre de niveaux de gris de l'image et K le nombre de niveaux de gris de la quantification ;
- Soit $(p_0, p_1, \ldots, p_{N-1})$ est l'histogramme de l'image I ;
- Soit $T = (t_0 = 0, t_1, t_2, t_{K-1}, t_K = N - 1)$ un vecteur de multi-seuillage ;
- Soit $R = (r_0, r_2, \ldots, r_{K-1})$ le vecteur des représentants

On définit la fonction de quantification par multi-seuillage $Q_{T,R}$ d'une image monochrome de la manière suivante : si $t_i \leq c < t_{i+1}$, alors $Q_{T,R}(c) = r_i$.

Conditions nécessaires pour que $Q_{T,R}$ minimise l'EQ :

$$r_i = \frac{\sum_{j=t_{i-1}}^{t_i-1} j p_j}{\sum_{j=t_{i-1}}^{t_i-1} p_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, K$$

$$t_i = \frac{(r_i + r_{i+1})}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, K-1$$

C'est-à-dire :

1) r_i est la moyenne du i-ème intervalle ;
2) t_i est le milieu de deux représentants voisins.

On peut utiliser la stratégie suivante :

1° Initialiser le vecteur T comme pour une quantification uniforme.

2° Itérer les deux étapes :
−Calcul de R en fonction de T
−Calcul de T en fonction de R
jusqu'à la stabilité des données.

8.4 Quantification adaptative d'images couleur

8.4.1 Méthode de popularité

– Très simple à implémenter
– Très grossière

8.4.2 Méthodes de regroupement

– Principe de la méthode
– Principe de la mise en oeuvre

8.4.3 Méthodes de partitionnements

– Stratégie du bi-partitionnement
– Algorithme de la coupe médiane (Heckbert)
– Minimisation de la variance
– Analyse en composante principale
– Stratégie de partitionnement multiple

8.5 Construction de la fonction de quantification

1) Repartitionnement de l'espace des couleurs
2) Calcul du diagramme de Voronoi discret 3D
3) Optimisation du calcul

8.6 Tramage d'image monochrome

[[10] chap.8]

8.6.1 Problématique

– Gravure et similigravure
– Tramage numérique
– Résolution
– Organisation spatiale
– Superposition de grilles

——— Cours 6 (24/01) : 3h ——— ***Cours : 16h / TD : 10h / Total : 26h*** ———

——— TD 6 (29/01) : 2h ——— ***Cours : 16h / TD : 12h / Total : 28h*** ———

8.6.2 Classification des méthodes à base de grille

- Périodique/apériodique
- Points regroupés/points dispersés

8.6.3 Formulation

$$\mathcal{I}(x,y) \in [0,1] \;\rightarrow\; I(x,y) \in \{0,1\}$$

si $\mathcal{I}(x,y) < S(x,y)$
  $I(x,y) = 0$
sinon
  $I(x,y) = 1$

- Seuil constant. $S(x,y) = \frac{1}{2}$
- Seuil aléatoire. $S(x,y)$: nombre aléatoire entre 0 et 1

8.6.4 Tramages périodiques

1) Matrice de seuillage D de taille $M \times N$
   - Exemple avec $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
   - Fonction de seuillage associée :

$$S(x,y) = \frac{1}{MN} D[x \bmod M][y \bmod n]$$

   - Contrôle de l'aspect : points regroupés, dispersés, effets spéciaux
   - Contrôle de l'orientation (0°, 45°)

2) Points regroupés (modulation d'amplitude)
   - Intérêt
   - Principe de construction
   - Exemples

3) Points dispersés (modulation de fréquence)
   - Intérêt
   - Principe de construction (Bayer, Ulichney)
   - Exemples

4) Effets spéciaux

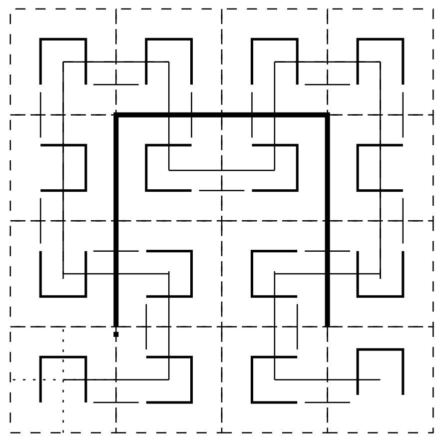
8.6.5 Tramages apériodiques

1) Principes généraux
   - Énumération de points
   - Diffusion de l'erreur

2) Points dispersés

   a) Énumération standard
      - Floyd et Steinberg, Jarvis et al, Judice et al
      - Défauts

   b) Énumération par courbe de Peano
      - Courbes de Peano (fin XIX^e) : $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$
      - Courbe de Hilbert



3) Points regroupés (MA)
   a) Diffusion de *points* (Knuth)
   b) Partitionnement par courbe de Peano
      (i) Parcourir l'image par groupes de N pixels (adjacents) au moyen de la courbe de Hilbert
      (ii) Calculer la moyenne de l'image sur chaque groupe et afficher un motif composé des K premiers pixels, $\frac{K}{N}$ approximant l'intensité.
      (iii) Possibilité de centrage du motif sur le point le plus sombre du groupe.
   c) Partitionnement adaptatif (MA/MF)

8.6.6 Améliorations

- Rehaussement du contraste
- Accentuation des contours
- Perturbations aléatoires

8.7 Tramage d'image couleur

- Périodique
- Diffusion d'erreur

8.8 Tramage sans grille

CHAPITRE 9

TRANSFORMATIONS CHROMATIQUES

9.1 Saturation/Désaturation

9.1.1 Changement d'espace

RGB → HSV → H'SV → R'G'B'

9.1.2 Conversion monochrome

Désaturation totale :

$$n = Y_R c_R + Y_G c_G + Y_B c_B$$

Par exemple, pour le modèle REC 709 avec D65, on a :

$$\begin{aligned} Y_R &= \\ Y_G &= \\ Y_B &= \end{aligned}$$

9.1.3 Désaturation par transformation linéaire

$$T = \begin{pmatrix} (1-s)Y_R + s & (1-s)Y_G & (1-s)Y_B \\ (1-s)Y_R & (1-s)Y_G + s & (1-s)Y_B \\ (1-s)Y_R & (1-s)Y_G & (1-s)Y_B + s \end{pmatrix}$$

⋄ ***Idée(s) d'exercice.*** *Montrer que pour s variant de 1 à 0 cette transformation opère une désaturation.*

Soit une couleur $c = (c_R, c_G, c_B)$ et $n = (n_R, n_G, n_B)$ le niveau de gris associé. On a $n_R = n_G = n_B = Y_R c_R + Y_G c_G + Y_B c_B$. Calculons la composante rouge de $c' = Tc$. On a

$$\begin{aligned} c'_R &= ((1-s)Y_R + s)c_R + (1-s)Y_G c_G + (1-s)Y_B c_B \\ &= Y_R c_R - sY_R c_R + sc_R + Y_G c_G - sY_G c_G + Y_B c_B - sY_B c_B \\ &= (Y_R c_R + Y_G c_G + Y_B c_B) - s(Y_R c_R + Y_G c_G + Y_B c_B) + sc_R \\ &= (1-s)n_R + sc_R \end{aligned}$$

Donc, c'_R est le résultat d'une interpolation linéaire entre c_R et n_R.

9.2 Modification de la teinte

1) Interpolation sur la teinte
2) Rotation chromatique sans conservation de la luminance
3) Rotation chromatique avec conservation de la luminance

9.3 Pseudo-couleurs

$$[0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$$

Intérêt :
- Compenser les limites de la perception visuelle sur les variations faibles d'intensité : au plus une trentaine de niveaux de gris distinguables pour plusieurs centaines de couleurs (différent du nombre de niveaux ou de couleurs nécessaire pour une représentation sans distorsion visible).
- Accentuation des détails

Inconvénient : Atténuation du gestalt[1]

Mises en oeuvre [[17] P.247]
- Corrections (voir courbes prédéfinies dans `xv`).
- Interpolation le long d'une courbe dans un espace de couleur
  - Rotations sur la teinte
  - Gamme de couleur (Noir → Rouge → Blanc)
- Raies
- Variations périodiques rapides de la teinte
- Coloration de gradients
- Coloration par bande de fréquence

9.4 Transformation par canal

- Projections
- Inversion
- Seuillage (RGB ou V)
- Solarisations

[1] Ce terme, utilisé pour parler des composants non élémentaires d'une image, provient de la *Psychologie de la forme* initiée par Paul Guillaume 1937 (*Gestaltpsychologie*). Elle s'inspirent de travaux du psychologue viennois Von Ehrenfels : une forme est autre chose ou quelque chose de plus que la somme de ses parties ; elle possède des propriétés qui ne résultent pas de la simple addition des propriétés de ses éléments (Von Ehrenfels, *Sur les qualités de la forme, 1890*).

CHAPITRE 10

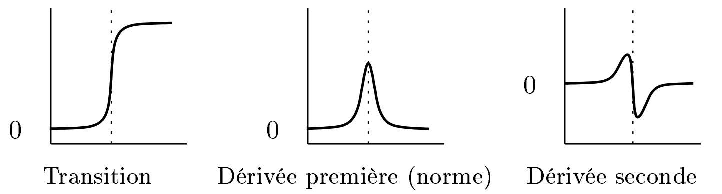
MATÉRIALISATION DES CONTOURS

10.1 Matérialisation des contours

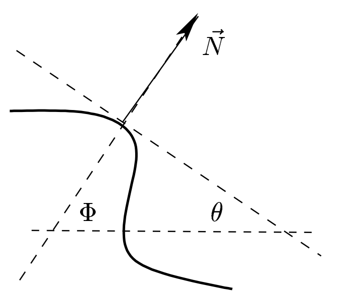
Construction d'une image I' contenant les contours des régions d'une image I. Exemples. [[3] chap.5] [[10] p.160]

10.1.1 Méthodes dérivatives

Principe



▹ ***Courbe de niveau.*** Courbe $I(x, y) =$ ***constante***.



▹ ***Gradient.*** Le gradient au point P est un vecteur normal à une courbe de niveau passant par le point P.

En continu, gradient au point (x, y) :

$$\nabla I(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial I}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Localement la norme du gradient est d'autant plus élevée que les courbes de niveau sont rapprochées.

L'orientation du gradient Φ est donnée par :

$$\Phi = \arctan \left(\frac{\frac{\partial I}{\partial y}}{\frac{\partial I}{\partial x}} \right)$$

et le vecteur unitaire $\vec{N}$ normal au contour est donné par :

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos\Phi \\ \sin\Phi \end{pmatrix}$$

L'orientation du contour vaut $\theta = \frac{\pi}{2} - \Phi$.

La recherche des maxima locaux repose sur le calcul des dérivées directionnelles :

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{N}} = \nabla(x,y)\vec{N} = \frac{\partial I}{\partial x}\cos\Phi + \frac{\partial I}{\partial y}\sin\Phi$$

Un extremum de la dérivée directionnelle suivant $\vec{N}$ correspond à un passage par zéro de la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \vec{N}^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\cos^2\Phi + 2\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} cos\Phi sin\Phi + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\sin^2\Phi$$

On approxime cette équation par le passage par zéro du laplacien qui est un opérateur isotrope pouvant être défini selon deux directions orthogonales quelconques.

(Rappel. Laplacien : $\Delta I(x,y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$)'

10.1.2 Opérateur dérivatifs du premier ordre

▹ ***Dérivées partielles discrètes.*** Dans le plan discret, approximation de $\frac{\partial I}{\partial x}$ par

$$\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}i} = I(i+1,j) - I(i,j)$$

On utilise des noyaux de convolution directionnels qui calculent les dérivées partielles :

$$\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}\alpha}(i,j) = f_\alpha * I(i,j)$$

On recompose ensuite les résultats en calculant la norme du gradient.

▹ ***Norme du gradient.*** On peut adopter plusieurs définitions :

$$|\nabla I(i,j)| = \sqrt{(\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}i})^2 + (\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}j})^2}$$

$$|\nabla I(i,j)| = \max\{|\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}i}|, |\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}j}|\}$$

$$|\nabla I(i,j)| = |\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}i}| + |\frac{\mathbf{d}I}{\mathbf{d}j}|$$

Opérateurs de Prewitt

$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad f_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Opérateurs de Sobel

$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad f_j = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

On peut remarquer que les opérateurs de Prewitt et de Sobel sont le résultat du produit entre un lissage dans une direction et une dérivation dans la direction orthogonale. Par exemple

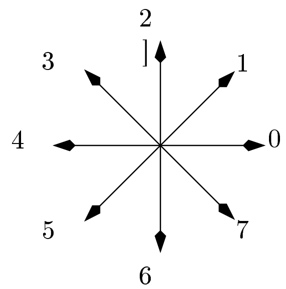
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérateurs de Kirsh

Huit opérateurs directionnels selon les huit directions suivantes :



$$f_0 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \ldots$$

On prend pour norme du gradient le maximum des valeurs absolues et pour direction celle associée à l'opérateur ayant donné le résultat maximal :

$$\Phi = \frac{\pi}{4} \operatorname*{argmax}_{k=0,7} \{|f_k * I(i,j)|\}$$

Remarque 10.1 *Il est également possible d'utiliser huit opérateurs directionnels avec les noyaux de Prewitt, Sobel, ou des variantes.*

Remarque 10.2 *Le premier premier opérateur proposé est la croix de Roberts (*Robert cross*) [1965] :*

- $D_1 = I(i, j+1) - I(i+1, j)$
- $D_2 = I(i, j) - I(i+1, j+1)$
- $D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$

Opérateur MDIF

Combinaison des opérateurs de Prewitt avec un filtre moyenneur m :

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut directement appliquer les masques résultant de la convolution du filtre moyenneur avec les deux masques de Prewitt :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 11 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Extraction des contours

1) Calcul du gradient en chaque point
2) Construction de l'image de la norme du gradient
3) Seuillage

Remarque 10.3 *Cette technique peut être utiliser comme prétraitement de la segmentation. Il est alors nécessaire de reconnecter les contours. On effectue dans ce cas des traitements plus complexes (extraction de maxima locaux dans la direction du gradient, seuillage par histérésis).*

——— Cours 7 (20/11) : 3h ———————— ***Cours : 19h / TD : 12h / Total : 31h*** ———

10.1.3 Opérateur dérivatifs du second ordre

Laplacien de gaussienne (LOG) – Marr-Hildreth

Principe :

1) Lissage par une gaussienne (croît avec σ)
2) Calcul de la dérivée seconde dans la direction du gradient
3) Recherche des passages par zéro

On approxime cette méthode en recherchant les passages par zéro du laplacien d'une gaussienne. On peut précalculer le noyau de la convolution :

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \Delta G \\ &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \\ &= \frac{r^2 - \sigma^2}{\sigma^4} exp(\frac{-r^2}{2\sigma^2}) \end{aligned}$$

La valeur de σ permet de contrôler le niveau de lissage de la gaussienne et par conséquent le niveau de détail auquel sont recherchés les contours.

Différence de gaussiennes (DOG)

On peut approximer l'opérateur précédent par la différence de deux gaussiennes de variance proche (on peut montrer que $\frac{\sigma}{\sigma'}$ de l'ordre de 1.6 (ou 0.6) convient bien. L'exemple de la figure 10.1 est construit avec $g_1 = \frac{1}{2\pi} exp(\frac{-x^2}{2})$ $(\sigma = 1)$, $g_2 = \frac{1}{2\pi \times 0.6^2} exp(\frac{-x^2}{2 \times 0.6^2})$ $(\sigma = 0.6)$, et $g = g_2 - g_1$. La figure 10.2 compare la réponse impulsionnelle de filtres DOG et LOG.

10.1.4 Filtrage optimal

- Filtres non linéaires (récursifs) solutions d'équations différentielles exprimant des critères à satisfaire, notamment une faible multiciplité des maxima dus au bruit.
- Filtres de Cany : recherche des zéros de $\frac{\partial^2 G}{\partial \vec{N}^2}$, la dérivé seconde dans la direction du gradient d'une image lissée par une gaussienne. La norme du gradient doit être supérieure à un seuil.
- Deriche : variante améliorée.
- Shen.

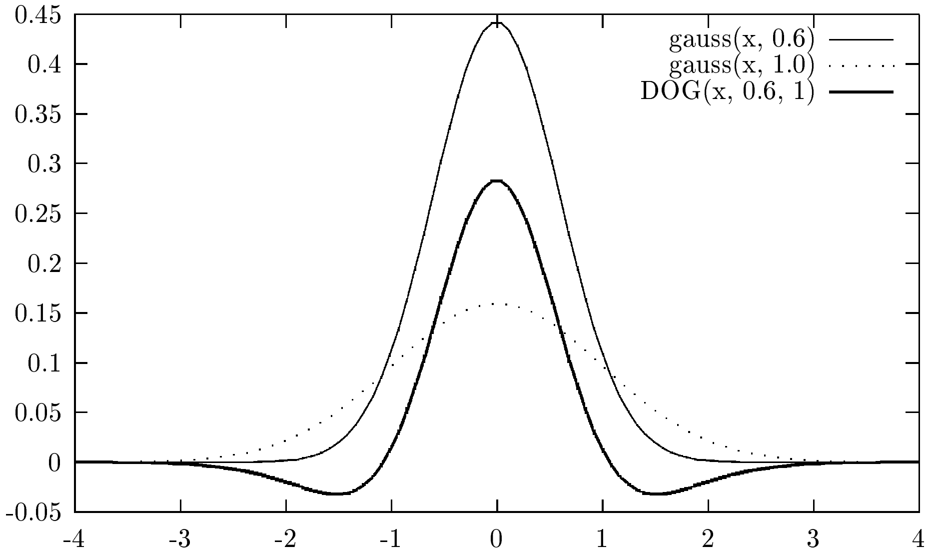


Fig. 10.1: *Exemple de construction de DOG à partir de deux gaussiennes*

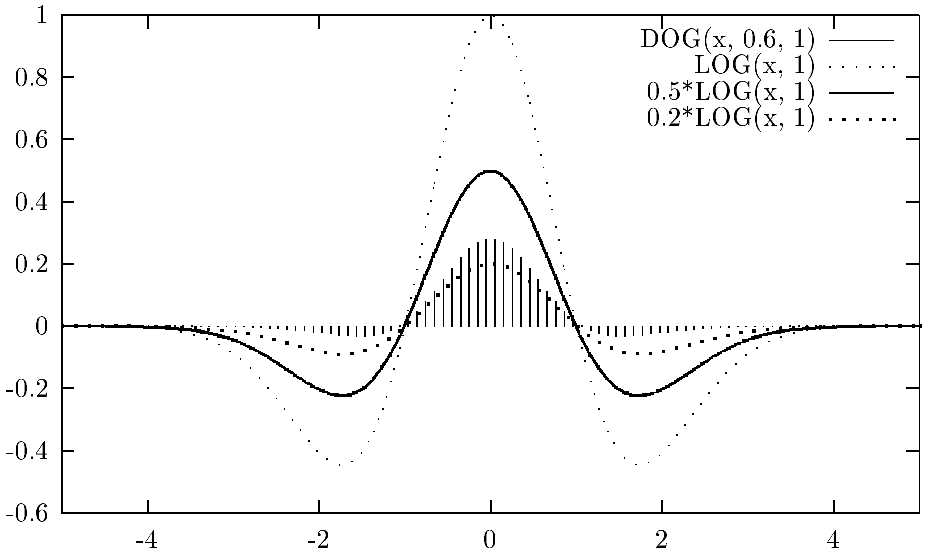


Fig. 10.2: *Comparaison de -LOG ($\sigma = 1$) et DOG ($\sigma = 0.6$ et $\sigma = 1$).*

10.1.5 Gradients morphologiques

Gradients de base. On considère un élément structurant symétrique :

1) Gradient de Beucher : $\rho_B(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f)$
2) $\rho_B^+(f) = \delta_B(f) - f$
3) $\rho_B^-(f) = f - \varepsilon_B(f)$

Remarque 10.4 *En continu, on définit le gradient de Beucher par*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\delta_{\lambda B} - \varepsilon_{\lambda B}}{2\lambda}$$

ce qui revient à considérer un élément structurant qui est la limite d'un disque dont le rayon tend vers 0. On peut alors montrer que $\rho(f) = |\nabla f|$.

Gradients épais. On considère des éléments structurants de taille supérieure à 1. Permet de détecter des frontières dont la transition est peu abrupte.

Gradients directionnels. On utilise des éléments structurants directionnels, par exemple verticaux et horizontaux.

10.2 Effets spéciaux

1) Matérialisation des contours dans l'image : combinaison de l'image avec l'image de ses contours.
2) Pixelisations
3) Diffusions
4) *Oil painting*
5) *Emboss*
6) *End less*
7) Mosaïque
8) Bentley

CHAPITRE 11

TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

11.1 Problématique

11.1.1 Transformations continues

On considère une image $\mathcal{I} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{C}$ et une transformation h opérant sur le domaine de $\mathcal{I}$:

$$h : \mathcal{D} \to \mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^2$$

- Condition minimale naturelle : h continue et injective
- Condition plus forte : f bijective, continue et à réciproque continue (homéomorphisme) – exemple d'un dessin sur un ballon de baudruche.

L'image $\mathcal{I}$' résultant de la transformation h peut s'exprimer à partir du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{I}"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{C} \\ \mathcal{D}' \arrow[ur, "\mathcal{I}'"] & \end{tikzcd}$$

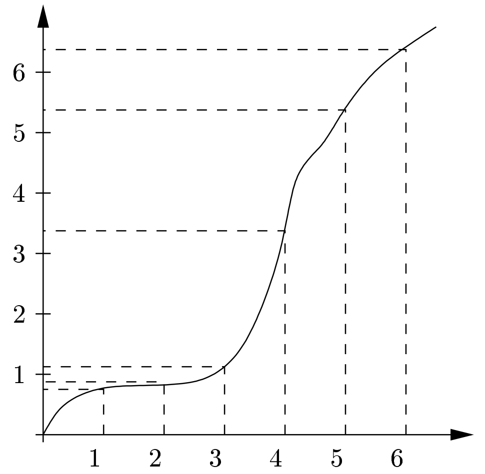
On a : $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \circ h^{-1}$. En clair, on peut déduire la couleur d'un pixel à partir de la couleur de la transformé inverse. Cette technique est utilisée couramment, par exemple pour des rotations ou des déformations libres (*warping*).

Principales transformations
- Expansions et contractions (*zooms*)
- Cisaillements et rotations
- Déformations libres
- Pseudo 3D

11.1.2 Transformations discrètes

Difficulté : la transformation envoie généralement les points de $\mathbb{Z}^2$ sur des points réels quelconques :
- Trous (expansions)
- Superpositions (contractions)

Exemple en 1D :



- Exemple de contraction : $\{1, 2, 3\} \rightarrow 1$
- Exemples de trou : 2, 4.

Problématique générale : rééchantillonnage.

11.2 Échantillonnage et aliasing

11.2.1 Échantillonnage et reconstruction d'un signal 1D

- Illustration du phénomène d'aliasing :
  - Modification du signal
  - Battements
  - Fréquence de Nyquist
- Solution : filtrage passe bas
- Filtres de reconstruction

11.2.2 Exemples en 2D

Voir exemples

11.3 Changement de résolution (*zooms*)

11.3.1 Cas particulier : k entier

1) Grossissement (expansion)
   - Méthode naïve : pixelisation.
   - Amélioration par lissage
2) Réduction (contraction)
   - Méthode naïve : battements, aliasing (voir exemples)
   - Amélioration par lissage (suppression des hautes fréquences)

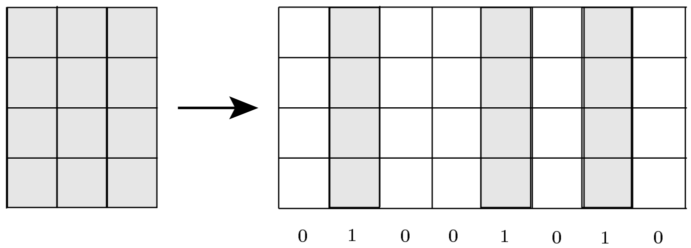
11.3.2 Expansion par l'algorithme de Weiman

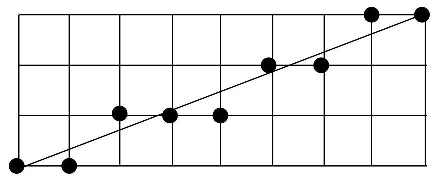
- Intérêt historique et théorique (relation avec les droites discrètes).
- On considère l'expansion horizontale d'un facteur rationnel $\frac{p}{q}$ $(p > q)$.
- Cela revient à répartir équitablement q points parmi p.
- Problème analogue au traçage de la droite passant par l'origine et de pente $\frac{q}{p}$.
- On considère le mot de trace de la droite que l'on utilise pour synchroniser le parcours de l'image source `IS` et de l'image destination `ID` durant la recopie :

```
1) s = 0
2) d = 0
```

```
3) (tant que) (d < p)
   a) si c_d == 1
        Recopier la colonne s de IS sur la colonne d de ID
        Incrémenter s
   b) Incrémenter d
```

– On recommence p fois, en effectuant des rotations du code et en ajoutant la valeur recopiée dans l'image destination, puis on fait la moyenne en divisant des images obtenues par q.

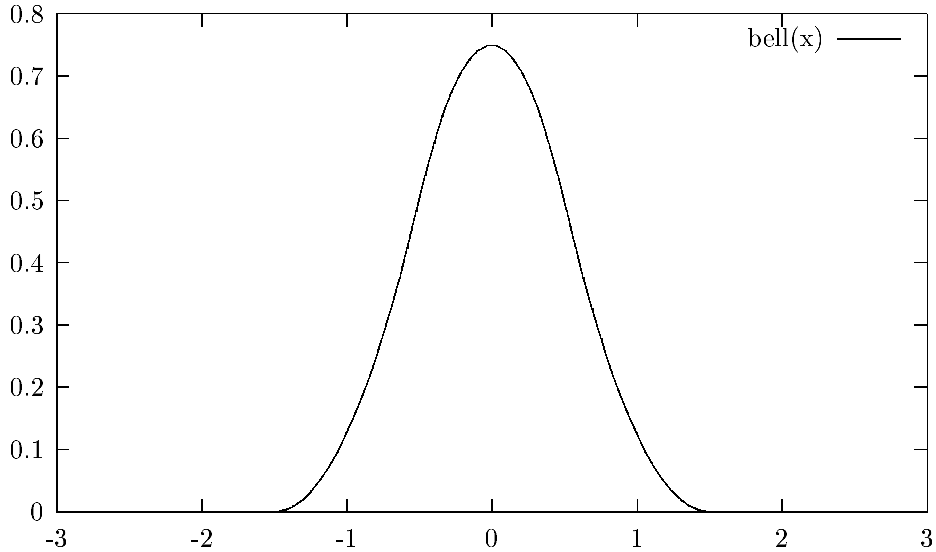




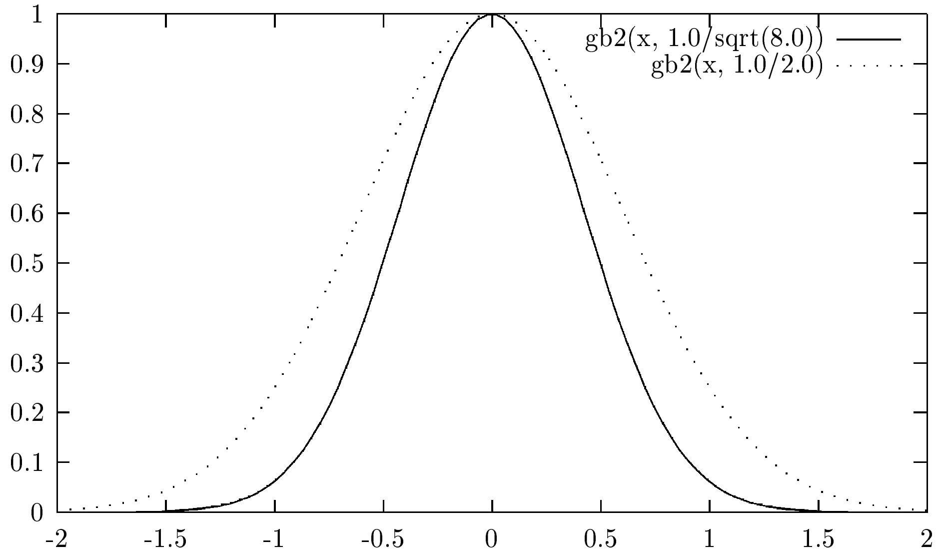
11.3.3 Expansion/contraction par rééchantillonnage

Choix du filtre

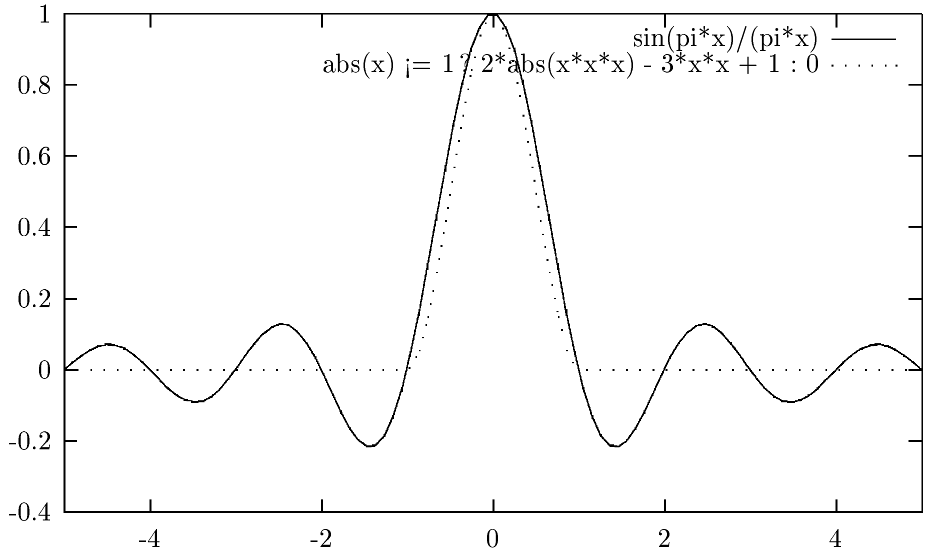
1) Idéal : *sinc*
2) Filtres usuels normalisés à 1 en amplitude et de plus ou moins grande bande passante.
   – *box* sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
   – *tent* sur $[-1, 1]$ (*box*∗*box*)
   – *bell* sur $[-1.5, 1.5]$ (*box*∗*box*∗*box*)
     – Si $|t| \leq \frac{1}{2}$ alors $-t^2 + \frac{3}{4}$
     – Sinon si $|t| \leq 1.5$ alors $\frac{1}{2}(|t| - \frac{3}{2})^2$
     – Sinon 0.



- ***gauss*** : on considère également $2^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.



- ***lanczos***
- approximation sur $[-1,1]$: $2|x|^3 - 3x^2 + 1$.



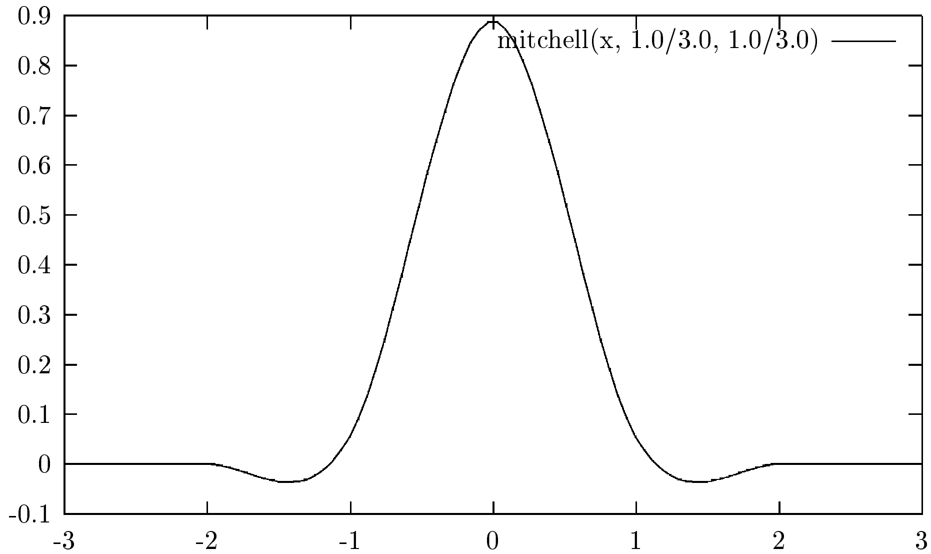
3) Filtre de Mitchell :
- Pour $x \in [-1,+1]$:

$$\frac{1}{6}\left((12 - 9B - 6C)|x|^3 - (18 - 12B - 6C)x^2 + (6 - 2B)\right)$$

- Pour $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$:

$$\frac{1}{6}\left((-B - 6C)|x|^3 + (6B + 30C)x^2 - (12B + 48C)|x| + 8B + 24C)\right)$$

- Et 0 sinon.
- Pour $B = \frac{1}{3}$ et $C = \frac{1}{3}$, compromis entre le lissage d'un B-spline ou d'une gaussienne et l'effet d'accentuation obtenu par ***sinc***. ($\frac{7}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{9}$ et)



Principe

1) Expansion

   a) Superposition de la fonction de reconstruction (réponse impulsionnelle du filtre utilisé) sur chaque pixel source.

   b) Produit de la fonction de filtrage par la valeur normalisée du pixel (correspond à un changement d'échelle)

   c) En chaque point destination, somme de toutes les contributions, c'est-à-dire des valeurs de la fonction en ce point.

2) Réduction d'un facteur rationnel k : la fonction de reconstruction est :

   a) Élargie d'un facteur k : correspond à un lissage des hautes fréquences ;

   b) Réduite en amplitude du même facteur k (compensation).

$$f(t) \rightarrow \frac{1}{k} f(\frac{1}{k} t)$$

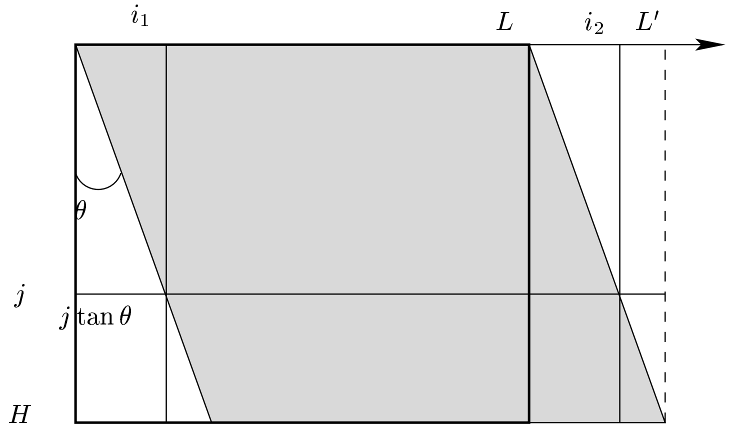
11.4 Cisaillements

11.4.1 Définition

On considère une image de taille $L \times H$. Un cisaillement d'angle θ (*shearing*) que l'on déforme au moyen de la transformation :

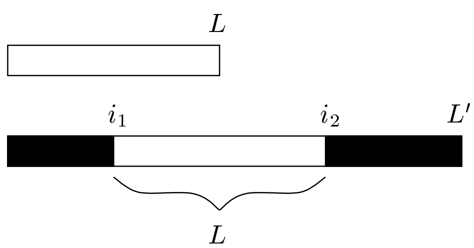
$$(i, j) \rightarrow (i + j \tan \theta, j)$$

On complète l'image par une couleur de fond, par exemple du noir. La nouvelle taille de l'image est dans ce cas $L' \times H$ avec $L' = \lceil L \tan \theta \rceil, H$.



11.4.2 Implémentation sans anti-aliasing

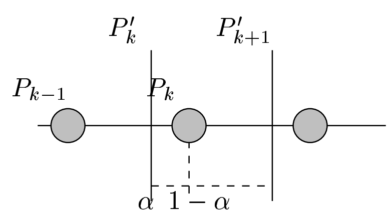
Recopie de la ligne j :
$i_1 = \lceil j \tan\theta \rceil$
$i_2 = i_1 + L$



1) $I'_j[0], \dots I'_j[i_1 - 1] \longleftarrow 0$
2) $I'_j[i_1] \longleftarrow I_j[0], \dots, I'_j[i_1 + L - 1] \longleftarrow I_j[L-1]$
3) $I'_j[i_2], \dots I'_j[L'] \longleftarrow 0$

11.4.3 Implémentation avec anti-aliasing

Comme le transformé du point (i, j) est généralement un point (i', j) avec $i' \notin \mathbb{N}$, lors de l'échantillonnage, on répartit l'intensité de (i, j) sur les points $(\lfloor i \rfloor, j)$ et $(\lceil i \rceil, j)$ inversement proportionnellement aux distances.



On a :

$$\alpha = j \tan\theta - \lfloor j \tan\theta \rfloor$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P'_0 & = & \alpha P_0 \\ P'_k & = & (1-\alpha) P_{k-1} + \alpha P_k \\ P'_{L+1} & = & (1-\alpha) P_L \end{array} \right.$$

11.5 Rotations

11.5.1 Transformation continue

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

11.5.2 Transformation directe

On calcule $P' = MP$. Le point P' est généralement à l'intérieur d'un carré unité défini par quatre points à coordonnées entières. On répartit l'intensité de P sur ces quatre points au moyen d'une fonction de lissage. On préfère généralement utiliser la transformée inverse.

11.5.3 Transformation inverse

On part d'un point P à coordonnées entières de l'image d'arrivée et on calcule $P_0 = M^{-1}P$. Comme précédemment P_0 est généralement à l'intérieur d'un carré unité défini par quatre points à coordonnées entières. On calcule l'intensité de P en interpolant les intensités de ces quatre points au moyen d'une fonction de lissage.

11.5.4 Transformations multipasses

- Première version : deux passes
- Trois passes : composition de trois cisaillements

On pose :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où on tire

$$\begin{cases} \alpha = \gamma & = \dfrac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} \\ \beta & = \sin\theta \end{cases}$$

Comme la première expression est numériquement instable autour de zéro, on récrit $\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$ en $\tan\frac{\theta}{2}$. On tire finalement :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit encore :

$$\begin{cases} x = x - y\tan\frac{\theta}{2} \\ y = y - x\sin\theta \\ x = x - y\tan\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

11.6 Application d'image

[[6] p826]

11.7 Déformations libres

[[9] pp283–290]

11.8 Correction de distorsions

——— Cours 8 (6/12) : 3h ——— ***Cours : 22h / TD : 12h / Total : 34h*** ———

TD : Rééchantillonnages et aliasing

—— TD 7 (8/12) : 3h —————— ***Cours : 22h / TD : 15h / Total : 37h*** ——

CHAPITRE 12

COMBINAISONS D'IMAGE

[Hammel pp 148-151]

12.1 Introduction

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}' \, \boldsymbol{op} : \mathcal{I}''$$

- Traitement d'intensité
- Traitement géométrique

Objectifs.

1) Correction de défauts ;
2) Traitements multibandes (combinaison de canaux),
3) Comparaison d'images (en général, différence d'images) :
   - Contrôle qualité,
   - Identification de mouvements ;
4) Compression (en général, différence d'images) ;
5) Édition d'image :
   - Incrustation d'objets ;
   - Rendu 2D$\frac{1}{2}$: calques (*layers*).
6) Déformations « continues » (*morphing*).
7) Effets spéciaux.

Principes généraux.

- Composition *pixel à pixel* : en général, opérations arithmétiques entre deux pixels correspondant de deux images différentes (sur l'intensité ou sur une ou plusieurs composantes dans un modèle de couleur).
- Mixage (opacité).
- Composition de domaines :
  - Définition de domaines (masques)
  - Compositions ensemblistes
  - Antialiasing

12.2 Composition de pixels

12.2.1 Combinaisons canal par canal

Il s'agit de combinaisons au moyen d'opérations usuelles : opérations arithmétiques, minimum, maximum, etc. Lorsque les opérateurs ne sont pas normalisés, le valeurs inférieure (resp. supérieures) à la valeur minimale (resp. maximale) d'un canal sont forcées à la valeur minimale (resp. maximale).

1) Sommes
   a) Addition simple (mode `Addition` de *GIMP*) :

$$C_k = C'_k + C''_k$$

   b) Moyenne :

$$C_k = \frac{1}{2}(C'_k + C''_k)$$

   c) Pondérations : transparences (voir mélanges) ;
2) Différences
   a) Soustraction simple (mode `Substract` de *GIMP*) :

$$C_k = C'_k + C''_k$$

   b) Valeur absolue de la différence (mode `Difference` de *GIMP*) :

$$C_k = |C'_k + C''_k|$$

3) Produit (mode `Multiply` de *GIMP*) :

$$C_k = C'_k \times C''_k$$

   Tendance à assombrir l'image et à augmenter les ombres. Correspond approximativement à une superposition de transparents sur une table lumineuse.
4) Quotient :

$$C_k = C'_k / C''_k \quad (\text{si} C''_k = 0, \text{ alors } C_k = \mathbf{max})$$

5) Maximum (mode `Lighten only` de *GIMP*) :

$$C_k = \max\{C'_k, C''_k\}$$

   Éclaircissement de l'image
6) Minimum (mode `Darken only` de *GIMP*) :

$$C_k = \min\{C'_k, C''_k\}$$

   Assombrissement de l'image.
7) Mode `Screen` de *GIMP* :

$$C_k = \mathbf{scr}(C'_k, C''_k) = 1 - (1 - C'_k) \times (1 - C''_k)$$

   Correspond approximativement à la superposition de deux projections sur un écran.
8) Mode `Overlay` de *GIMP* :

$$C_k = \mathbf{scr} \times C'_k + C'_k \times C''_k \times (1 - C'_k)$$

   Intensification des couleurs et éclaircissement/assombrissement du fond conformément à l'image en avant-plan.

Remarque 12.1 *Dans le cas particulier d'images noir et blanc (0/1) il est également possible d'effectuer des opérations booléennes (**et**, **ou**, **ou exclusif**) avec les images ou leur complémentaires).*

12.2.2 Combinaison de canaux

Construction de la nouvelle valeur à partir de certains canaux de la première image et ces canaux complémentaires de la seconde.

1) R/GB,G/RB, B/RG, RG/B, RB/G, GB/R
2) H/SV (mode `Hue` de *GIMP*)
3) S/HV (mode `Saturation` de *GIMP*)
4) HS/V (mode `Color` de *GIMP*)
5) V/HS (mode `Value` de *GIMP*)

12.3 Opacité

– Mixage d'image :

$$C_k = \alpha \times C'_k + (1-\alpha)C''_k \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

– On peut associer un coefficient d'opacité à une image ou à une partie d'une image :
  – $\alpha = 1$: objet opaque
  – $\alpha = 0$: objet transparent
– Ce modèle n'a pas de réalité physique mais est communément utilisé pour mixer des images. Il est souvent confondu avec la transparence.
– Alternative : mixage spatial (mode `Dissolve` de *GIMP*). S'apparente à du tramage.

12.4 Composition de domaines

12.4.1 Définition de domaine

Un domaine est sous-ensemble A du domaine de l'image. On note χ_A sa fonction caractéristique :

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Si on associe une opacité α au domaine A, on peut considérer sa fonction d'opacité définie par $\alpha \times \chi_A$. On va voir que la discrétisation de cette fonction d'opacité correspond concrètement au traitement de l'antialiasing.

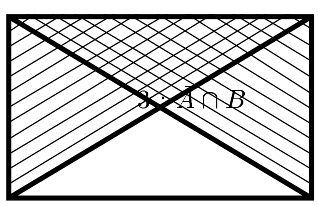
12.4.2 Opérateurs de composition

On considère deux domaines A et B. Ils partitionnent le domaine de l'image en quatre sous-ensembles, avec pour chacun comme couleur possible :
– $\bar{A} \cap \bar{B}$: ***rien***.
– $A \cap \bar{B}$: ***rien*** ou B ;
– $A \cap B$: ***rien***, A, ou B ;
– $\bar{A} \cap B$: ***rien*** ou A ;

On note ***rien*** par zéro. Cela correspond à une couleur totalement transparente. Au total, cela fait douze combinaisons possibles. Avec la numérotation suivante des quatre sous-ensembles :

4 : $A \cap B$

2 : $A \cap \bar{B}$



1 : $\bar{A} \cap \bar{B}$

Ces douze combinaisons sont les suivantes :

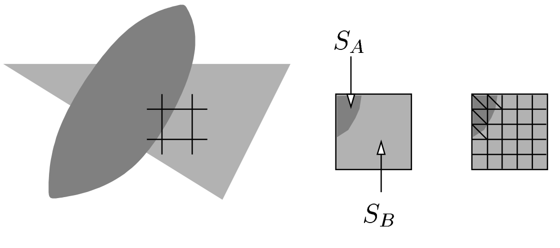
1) (0, 0, 0, 0)
2) (0, A, 0, A)
3) (0, 0, B, B)
4) (0, A, B, A)
5) (0, A, B, B)
6) (0, 0, 0, A)
7) (0, 0, 0, B)
8) (0, A, 0, 0)
9) (0, 0, B, 0)
10) (0, 0, B, A)
11) (0, A, 0, B)
12) (0, A, B, 0)

On peut les résumer au moyen de sept opérateurs différents. On note X et Y le premier et le second argument de l'opérateur. Les douze cas de figure s'expriment de la manière suivante :

1) ***clear*** :
   $\boldsymbol{clear}(A, B) = (0, 0, 0, 0)$
2) $\boldsymbol{set}_i$:
   $\boldsymbol{set}_1(A, B) = (0, A, 0, A)$
   $\boldsymbol{set}_2(A, B) = (0, 0, B, B)$
3) ***over*** : recouvrement de Y par X.
   $\boldsymbol{over}(A, B) = (0, A, B, A)$
   $\boldsymbol{over}(B, A) = (0, A, B, B)$
4) ***inside*** : partie de X dans Y.
   $\boldsymbol{inside}(A, B) = (0, 0, 0, A)$
   $\boldsymbol{inside}(B, A) = (0, 0, 0, B)$
5) ***outside*** : partie de X hors de Y.
   $\boldsymbol{outside}(A, B) = (0, A, 0, 0)$
   $\boldsymbol{outside}(B, A) = (0, 0, B, 0)$
6) ***atop*** : recouvrement de Y par X, seulement sur le domaine de Y.
   $\boldsymbol{atop}(A, B) = (0, 0, B, A)$
   $\boldsymbol{atop}(B, A) = (0, A, 0, B)$
7) ***xor*** (différence symétrique $(A - B) \cup (B - A)$) :
   $\boldsymbol{xor}(A, B) = (0, A, B, 0)$

12.5 Antialiasing

Problème de discrétisation d'un domaine A. Les pixels du bord recouvrent partiellement A et partiellement un autre domaine (ou le fond).



On considère un pixel recouvert par deux domaines A et B. Soit F_A la portion du pixel recouverte par le domaine A et soit F_B la portion recouverte par le domaine B. La couleur résultant de la discrétisation de ces deux domaines est donnée par :

$$\begin{aligned} c &= \frac{F_A \times C_A + F_B \times C_B}{F_A + F_B} \\ &= \alpha C_A + (1-\alpha) C_B \end{aligned}$$

Si l'on connaît une définition continue du domaine de A, on peut estimer α
- Par calculs géométriques (aire de polygones)
- Par suréchantillonnage.

Sinon, possibilité d'utiliser la technique des chemins euclidiens (voir cours analyse).

Remarque 12.2 *Dans ce dernier cas, on peut également effectuer un lissage le long de la frontière discrète mais le résultat est moins bon.*

12.6 Technique de l'*alpha chanel*

12.6.1 Principe

On peut discrétiser la fonction d'opacité avec la même grille d'échantillonnage que l'image. À chaque pixel P est associé un coefficient d'opacité α_P. Si (R_P, G_P, B_P) est la couleur initiale de P, on représente la couleur résultante par

$$(\alpha_P \times R_P, \alpha_P \times G_P, \alpha_P \times B_P, \alpha_P)$$

C'est ce que l'on appelle également les *quantités prémultipliées.*

C'est ce que l'on appelle la technique du canal alpha (ou *alpha chanel*). Ce procédé proposé vers 1984 est souvent câblé sur les stations graphiques. Il permet d'unifier le traitement des *transparences* et de l'antialiasing.

Dans le cas d'un domaine opaque, on à trois types de valeurs :

1) Pixel entièrement à l'intérieur : 1
2) Pixel entièrement à l'extérieur : 0
3) Pixels sur la frontière : coefficient d'antialiasing

Dans le cas d'un domaine non opaque, toutes les valeurs sont multipliées par le coefficient d'opacité. Par conséquent, pour chaque pixel P, le coefficient $\alpha(P)$ code une opacité résultant à la fois de l'opacité du domaine et le cas échéant du recouvrement partiel du pixel par le domaine.

12.6.2 Validité

Montrons qu'on peut travailler sur les quantité prémultipliées. Soient deux pixels P_A et P_B appartenant respectivement à un domaine A et un domaine B et définis sur un même point du domaine de l'image.

$$\begin{aligned} P_A &= (\alpha_A C_A, \alpha_A) \\ &= (\tilde{C}_A, \alpha_A) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_B &= (\alpha_B C_B, \alpha_B) \\ &= (\tilde{C}_B, \alpha_B) \end{aligned}$$

On note F_A et F_B respectivement la fraction de A et de B conservée dans le pixel résultant R.

$$
\begin{aligned}
\alpha_R &= F_A\alpha_A + F_B\alpha_B \\
C_R &= \frac{F_A\alpha_A C_A + F_B\alpha_B C_B}{F_A\alpha_A + F_B\alpha_B}
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_R &= \alpha_R C_R \\
&= F_A\alpha_A C_A + F_B\alpha_B C_B \\
&= F_A\tilde{C}_A + F_B\tilde{C}_B
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on peut appliquer pour tout pixel :

$$
\tilde{C}_R = F_A\tilde{C}_A + F_B\tilde{C}_B
$$
$$
\alpha_R = F_A\alpha_A + F_B\alpha_B
$$

12.6.3 Calcul des coefficients de recouvrement

La valeur des coefficients F_A et F_B dépend de l'opérateur de composition de domaine.

On peut voir les α_i comme des densités de probabilité. Par exemple avec l'opérateur ***over***, on prend :

$$
\begin{aligned}
F_A &= 1 \\
F_B &= (1-\alpha_A) \quad \text{complémentaire de } A \text{ dans } P_A
\end{aligned}
$$

(voir transparent).

12.7 Morphing

Combinaison de deux transformations :

1) Transformation géométrique du domaine des deux images ;
2) Mixage des images résultantes.

——— Cours 9 (10/12) : 3h ——— ***Cours : 25h / TD : 15h / Total : 40h*** ———

Bibliographie

[1] C. Bonnet, editor. *La perception visuelle*. Bibliothèque Pour la science, Belin, 1984.

[2] P. Callet. *Couleur-lumière, couleur-matière*. Diderot éditeur, 1998.

[3] J.-P. Cocquerez and S.Philips, editors. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995.

[4] M. Déribéré. *La couleur*. Presses universitaires de France, 1984.

[5] H. John Durrett, editor. *Color and the Computer*. Academic press, 1986.

[6] Foley, van Dam, Feiner, and Hughes. *Computer Graphics – Principles and practices*. Addison-Wesley, 1990.

[7] E.J. Giorgianni and Th. E. Madden. *Digital Color Management*. Addison-Wesley, 1998.

[8] A. Glassner. *Principles of Digital Image Synthesis*, volume 1. Morgan-Kaufmann Publishers, 199.

[9] J. Gomes and L. Velho. *Image Processing for Computer Graphics*. Springer, 1997.

[10] R.C. Gonzalez and P. Wintz. *Digital Image Processing – secon edition*. Addison-Wesley, 1987.

[11] R.H. Hall. *Illumination and Color in Computer Generated Imagery*. Springer-Verlag, 1989.

[12] R.W. G. Hunt. *The reproduction of colour – 5^{th} ed.* Fountain Press, 1995.

[13] B Jähne. *Digital Image Processing – Concepts, Algorithms, and Scientific Application – third edition*. Springer, 1995.

[14] K. Kilander and O. Kilander. *The Gimp User Manual*. Coriolis, 1999. également consultable sur : `http ://manual.gimp.org/manual/GUM/GUM.html`.

[15] Ch. Poynton. *A Technical Introduction to Digital Video*. John Wiley & Sons, 1996.

[16] A. Rosenfeld and A.C. Kak. *Digital Picture Processing* – volumes 1 and 2. Academic Press, 1982.

[17] J.C. Russ. *The Image Processing Handbook*. CRC Press, 1992.

[18] P. Soile. *Morphological Image Analisis – principles and application*. Springer, 1999.

[19] R. Ulichney. *Digital Halftoning*. The MIT Press, 1988.

[20] A. Watt and F.Policarpo. *The Computer Image*. Addison-Wesley, 1998.

[21] G. Wyszecki and W.S. Stiles. *Color Science – Concepts and Methods, quantitative data and formulae, 2^{nd} ed.* Wiley, 1982.